Facultad de Humanidades y Ciencias
Universidad Nacional del Litoral

TESIS

Estudio de secuencia de problemas para promover el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de ingeniería

Maestría en Docencia Universitaria

Tesista: Lic. Olga Scagnetti

Directora: Dra. Sara Scaglia

Santa Fe, febrero 2023

Agradecimientos:

Principalmente a mis padres, Jorge y Mónica, que son mi ejemplo a seguir y que me enseñaron que con esfuerzo y perseverancia se llega lejos.

A José, Evangelina y Lucía por apoyarme en todo este proceso.

A Sara, mi directora, por confiar en mí, por su paciencia y dedicación.

A Carina y Matías, por hacerme más feliz la cursada.

A Jorge Díaz Lozada, por su generosidad en prestarme su libro.

Y a todos los que en pequeña o gran medida me ayudaron con esta tesis.

Declaración formal del autor:

Yo, Olga Etel Scagnetti, declaro que soy autora de este trabajo, que lo he realizado en su integridad y no lo he publicado para obtener otros grados o títulos.

Resumen

El avance de la ciencia y tecnología demandan al ingeniero ser capaz de dar respuestas a los problemas actuales de forma efectiva y creativa. La importancia de desarrollar el pensamiento matemático en la etapa de formación les permite contar con herramientas, tener la capacidad de razonar, reflexionar y analizar al momento de resolverlos.

Muchas veces la universidad satura de conocimientos a los estudiantes sin dedicarle el tiempo suficiente para desarrollar el pensamiento matemático. Esta experiencia busca promoverlo. Se espera generar situaciones cuyo abordaje requieran del uso del razonamiento lógico-deductivo, de herramientas heurísticas y de la metacognición, dimensiones adoptadas para identificar al pensamiento matemático siguiendo a Díaz Lozada (2018), para que sean capaces de optimizar la capacidad de toma de decisiones, concluir a partir de antecedentes disponibles, poseer la habilidad de argumentar, utilizar el pensamiento lógico y tener creatividad.

En esta tesis se diseña, implementa y evalúa una secuencia de problemas con el objetivo de promover el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de las carreras de ingeniería de la Facultad Regional Santa Fe, Universidad Tecnológica Nacional.

Se desarrolla la tesis bajo la metodología investigación-acción donde el docente es el investigador de su propia práctica con el objetivo de mejorar la calidad educativa. A partir de las dimensiones del pensamiento matemático adoptadas, se define un conjunto de indicadores para cada una, que resultan pertinentes para estudiar las producciones escritas, orales y los resultados de las encuestas de los estudiantes.

Los resultados obtenidos se encuentran desarrollados en el cuerpo de la tesis, pero se detecta que las dos dimensiones más desarrolladas por los estudiantes son el razonamiento lógico-deductivo y la metacognición. Las herramientas heurísticas fueron poco utilizadas en la resolución de esta secuencia de problemas aplicados.

ÍNDICE

Capítulo 1: Observación y Planificación……6

1.1. Interés del Tema……6

1.2. Antecedentes de Interés……8

1.3. Objetivos de la investigación y Marco metodológico……12

1.3.1. Objetivo General……13

1.3.2. Objetivos Específicos……13

1.3.3. Marco Metodológico……13

1.3.4. Caracterización del Entorno……16

1.3.5. Selección de los Sujetos del Estudio……17

Capítulo 2: Marco Teórico……21

2.1. Pensamiento Matemático……21

2.1.1. Aportes sobre el razonamiento Lógico-Deductivo……23

2.1.2. Aportes sobre Heurística……27

2.1.3. Aportes sobre Metacognición……31

2.2. Resolución de Problemas……34

2.2.1. Aportes de George Polya……36

2.2.2. Aportes de Alan Schoenfeld……37

2.2.3. Aspectos a Considerar en el Diseño de Problemas Matemáticos……41

2.3. Registros de Representación……47

Capítulo 3: Acción y Reflexión……51

3.1. Justificación de la secuencia de problemas……51

3.2. Caracterización de las consignas……54

3.3. Descripción del Análisis……56

3.4. Análisis de las Respuestas ……………………………………………………….61

3.4.1. Análisis de las producciones orales y escritas del coloquio 1……………………………………………………………….61

3.4.2. Análisis de las producciones orales y escritas del coloquio 2……………………………………………………………….75

3.4.3. Análisis de las producciones orales y escritas del coloquio 3……………………………………………………………….83

3.4.4. Análisis de las producciones orales y escritas del coloquio 4……………………………………………………………….94

3.4.5. Conclusiones generales de los coloquios…………………………102

3.5. Análisis de las Respuestas a las Encuestas ………………………………104

3.6. Proceso de Validación de los Estudiantes……………………………………108

Capítulo 4: Conclusiones ……………………………………………………………112

4.1. Consecución de los objetivos…………………………………………………112

4.2. Futuras líneas de investigación………………………………………………116

Referencias ……………………………………………………………………………118

Anexo N°1: Encuestas ……………………………………………………………122

Anexo N°2: Consignas de los problemas………………………………………124

Anexo N°3: Resolución experta de los coloquios……………………………127

Anexo N°4: Links a las producciones de los estudiantes……………………144

CAPÍTULO 1: Observación y Planificación

1.1. Interés del Tema

Esta tesis se propone reflexionar en torno al desarrollo del pensamiento matemático en futuros ingenieros. En esta sección se presenta una breve justificación de la temática seleccionada.

El ingeniero debe dar respuestas a las demandas científicas y tecnológicas de la sociedad, que avanzan de forma acelerada. Por ello, la formación del ingeniero debe ser amplia y con conciencia crítica satisfaciendo las necesidades presentes sin comprometer la posibilidad de las generaciones futuras, lo que Velásquez (2015) denomina desarrollo sostenible. Se espera que el ingeniero desarrolle conocimiento reflexivo sobre la sostenibilidad ambiental, económica y social para atender las necesidades y resolver problemas técnicos de la sociedad.

En forma más específica, y atendiendo al desempeño futuro, un aspecto que se valora especialmente en la formación inicial del ingeniero es la necesidad de dar respuestas y soluciones creativas a los problemas y demandas de la sociedad actual (García Retana, 2014). Reconociendo la importancia de una formación que apunte al desarrollo del conocimiento reflexivo en el sentido indicado en el párrafo anterior, esta tesis se enfoca en particular en dilucidar algunas cuestiones vinculadas con la capacidad para resolver problemas.

El ejercicio profesional de un ingeniero involucra procesos de pensamiento para enfrentar las diferentes problemáticas de manera eficiente y eficaz. En consonancia con estas afirmaciones, García Retana (2014) afirma que la ingeniería es una disciplina que debe proporcionar respuestas y soluciones de una manera holística y heurística. Para ello, es necesario estimular al estudiante para que utilice diversidad de heurísticas en la resolución de problemas, que hacen posible proponer soluciones creativas y novedosas a los problemas de su entorno. El ingeniero debe reflexionar y actuar optimizando el uso sostenible de los recursos naturales mediante la aplicación de la matemática.

El avance acelerado de la ciencia y la tecnología demandan a la educación la formación y el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes. La enseñanza matemática debe priorizar el desarrollo del pensamiento matemático por encima de la transferencia de conocimientos. Díaz Lozada (2018) afirma que la posesión del pensamiento matemático es una cualidad fundamental en la formación de un ingeniero.

Stacey (2006) sostiene que pensar matemáticamente supone alternar en torno a cuatro procesos fundamentales:

- Especialización: Refiere a probar casos especiales y hallar ejemplos
- Generalización: Involucra la búsqueda de patrones y relaciones
- Conjeturación: supone predecir relaciones y resultados
- Convencimiento: refiere a encontrar y comunicar razones por las cuales algo es verdad.

Sausen y Guérios (2010, citados por Díaz Lozada, 2018, p. 60), señalan que:

> Una de las metas de la enseñanza matemática es estimular a los estudiantes a pensar de manera fecunda, propiciar el razonamiento lógico, de manera eficaz e inteligente, para que luego le permita resolver situaciones diversas tanto en la escuela como fuera de esta.

Serna y Flórez (2013) sostienen que la forma de razonar de cada individuo depende de la formación recibida. Entonces si la formación de un ingeniero recibe herramientas suficientes para desarrollar el pensamiento matemático, tendrá la destreza de relacionar los diferentes aspectos de la realidad con los conocimientos aprendidos en la etapa de formación, desarrollando mejores herramientas para resolver problemas de forma eficiente.

El planteo de problemas contextualizados en situaciones vinculadas con la futura vida profesional promueve el interés de los estudiantes, y ayuda a entender a la matemática de forma menos abstracta y aislada. Se trata de proponer un abordaje de la matemática diferente al que tradicionalmente se desarrolla en la cátedra de Análisis Matemático II (AMII) de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN), Facultad Regional Santa Fe (FRSF).

En la investigación de Díaz Lozada (2018) se concluye que la aplicación de métodos de resolución de problemas, aprovechando los recursos de la heurística, estimula el desarrollo del pensamiento matemático. Desde la enseñanza y el aprendizaje se debe potenciar el desarrollo de las habilidades relacionadas a pensar cómo hacer las cosas y cómo resolver problemas sin dejar de lado de la teoría.

Se asume en este trabajo que la formación de un ingeniero no debe ser de forma lineal-secuencial mediante la acumulación de conocimiento inerte[1]. Se debe pensar a la

[1] Perkins (1995) define conocimiento inerte al conocimiento que los estudiantes recuerdan en un examen pero que luego son incapaces de recordarlo o usarlo en situaciones donde lo necesitan.

enseñanza de la matemática no solo con el fin de desarrollar contenidos curriculares, sino con la expectativa de generar actividades que contribuyan al desarrollo del pensamiento matemático en los futuros ingenieros. Siguiendo a Díaz Lozada (2018) se identifican tres dimensiones en el pensamiento matemático: el razonamiento lógico-deductivo, la heurística como recurso de búsqueda y la metacognición que permite valorar la actividad mental que se realiza. Estas dimensiones se analizan en mayor detalle en el Marco teórico de la tesis.

En la investigación se propone estudiar las limitaciones y potencialidades de una secuencia de problemas que busca promover el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de ingeniería. Los mismos se implementan en distintas instancias a lo largo del segundo cuatrimestre de cursado de la asignatura Análisis Matemático II, del segundo año de las carreras de ingeniería.

1.2. Antecedentes de Interés

Se presentan investigaciones en las que se estudian características de los estudiantes de diferentes universidades que se vinculan con el tema de interés de este estudio, en particular, con el desarrollo de las herramientas heurísticas, el pensamiento lógico y el pensamiento matemático avanzado.

Rodríguez et all. (2019) desarrollan un proyecto de investigación con el propósito de conocer las estrategias heurísticas con las que cuentan los ingresantes a la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS) y a la Facultad Regional Concepción del Uruguay de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN-CU). Los autores describen el trabajo intenso y complejo realizado con el fin de producir una gama de problemas para observar las diferentes estrategias heurísticas que los estudiantes ponen en juego durante su resolución. Completan la recolección de datos con entrevistas.

Para guiar su investigación definen algunos lineamientos como, por ejemplo:

- En la resolución de problemas las consignas no deben anunciar qué procedimiento o resultado aplicar ni tampoco poner de manifiesto el conocimiento matemático necesario para la resolución.
- Adoptan la definición de heurística de Verschaffel (1999, citado en Rodríguez, 2019, p. 19) que la considera “estrategias sistemáticas de búsquedas para el análisis y la

transformación de un problema que le ayudan significativamente al resolutor a aproximarse a hallar una solución apropiada".

- Consideran que las heurísticas son enseñables y denominan heurísticas espontáneas a las que no fueron enseñadas con anterioridad a la resolución del problema.

Los autores reconocen la dificultad para proponer problemas, ya que se debe lograr un equilibrio entre la inmediatez de encontrar una vía de solución y el hecho de superar el bloqueo inicial, lo cual es muy complejo de delimitar y abre camino a futuras investigaciones.

En primer lugar, realizan un diagnóstico de los saberes matemáticos, y les preguntan a los estudiantes cuáles ejercicios de la guía de ejercicios del libro de ingreso a la universidad les resultan fáciles, adecuados o difíciles. El diagnóstico tiene como objetivo plantear problemas acordes al nivel de cada grupo.

Muchas veces se comparan las estrategias heurísticas con las estrategias que realiza un matemático, tales como controlar las decisiones tomadas, ejemplificar, simplificar el problema, verificación constante de todos los pasos, entre otros. Este grupo de investigación considera que un estudiante novato no puede llevar a cabo lo que realiza un matemático, es decir, no tiene ese tipo de control. Por lo que desestiman el paralelismo con el matemático dándole lugar a las heurísticas propuestas por Polya.

Los problemas diseñados son implementados y se solicita a los estudiantes que los resuelvan de manera individual y entreguen no solo la hoja en limpio con la resolución sino también las hojas usadas como borrador, para ver los intentos fallidos y/o el proceso seguido hasta llegar a la solución. Los investigadores desean observar qué heurísticas se ponen en juego a la hora de resolver los problemas. El hecho de entregar los ensayos les permite detectar heurísticas que se les podrían pasar por alto si solo entregan la hoja en limpio. Su interés no radica en determinar si los estudiantes responden correctamente, sino en observar las heurísticas utilizadas.

Detectan que las heurísticas más utilizadas son la de traducir el problema a un lenguaje algebraico y examinar casos particulares. También manifiestan que ningún estudiante utiliza la heurística de modificar el problema, ya sea reducirlo a un problema más sencillo, descomponerlo en sub-problemas o introducir algún elemento auxiliar.

Como consecuencia de lo observado este grupo de investigación decide diseñar e implementar un dispositivo didáctico con el objetivo de enseñar las heurísticas carentes en los estudiantes. Afirman que la mejor manera de enseñarlas no es mediante una clase expositiva sino enfrentarlos a resolver problemas y promover la reflexión metacognitiva.

Barreiro y Casetta (2012, citadas por Rodriguez, 2017) destacan la importancia de fomentar la reflexión metacognitiva de los estudiantes, pues les permitirá recapacitar sobre el trabajo realizado al resolver problemas revisando y analizando las estrategias utilizadas, las dificultades que tuvieron, los aspectos a mejorar, entre otros. Si el estudiante es capaz de hacer este trabajo de metacognición podrá disponer de sus conocimientos y manipularlos en otra situación en la que los necesite.

Otro estudio de interés para esta investigación se realizó en la Universidad de La Guajira en Colombia (Romero Pabón et al., 2021), con el objetivo de fortalecer el pensamiento matemático de los estudiantes de Matemática I mediante la utilización de la hoja de cálculo. La propuesta surge por la constatación de la dificultad que tienen los estudiantes de la Facultad de Ciencias Básicas y Aplicadas e Ingeniería en desarrollar problemas aplicados. La hoja de cálculo se utiliza como una herramienta didáctica para fortalecer el pensamiento matemático.

Romero Pabón et al. (2021) clasifican el pensamiento matemático en cinco tipos: el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento métrico y los sistemas de medidas, el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. Los investigadores plantean situaciones que abarcan los diferentes tipos de pensamientos matemáticos asignándole a cada estudiante un grupo en forma aleatoria. A través del trabajo colaborativo los estudiantes deben resolver un problema propuesto por el docente con anterioridad. Para complementar esta experiencia los estudiantes deben responder cada semana cuatro preguntas abiertas sin límite de intentos donde cambian las condiciones iniciales en cada intento.

Según Romero Pabón et al. (2021, p. 3):

> El pensamiento matemático consiste en la sistematización y la contextualización del conocimiento de las matemáticas. [...] Cuando una persona desarrolla este pensamiento, alcanza una formación matemática compleja, lo cual le permite contar con un conocimiento amplio para tomar decisiones, es decir, permite a las personas obtener capacidades de razonamiento, reflexión y análisis.

Concluyen que el uso de la hoja de cálculo como herramienta didáctica fortalece el pensamiento matemático en los estudiantes de Matemática I de la Facultad de Ciencias Básicas y Aplicadas e Ingeniería. Recomiendan el manejo de Excel desde la escuela media ya que es utilizado en el mundo laboral por su versatilidad.

Mariño Pérez et al. (2021) desarrollan una investigación a partir de la identificación de ciertas falencias en estudiantes de ingeniería tales como: no se interesan en indagar el porqué de los hechos, muestran dificultades para resolver problemas y ejercicios integradores, olvidan con rapidez y presentan poca independencia y capacidad de autoestudio. Sostienen que la causa de estos comportamientos es la insuficiencia en el desarrollo del pensamiento lógico.

Los autores reconocen que en la universidad muchas veces satura de contenidos a los estudiantes sin dedicarle el tiempo suficiente al desarrollo del pensamiento. Sostienen que un ingeniero debe ser capaz de tomar decisiones, de llegar a conclusiones a partir de los antecedentes disponibles, tener la habilidad de argumentar, utilizar el pensamiento lógico-interpretativo y poseer creatividad. Afirman que estas cualidades se dan a través del desarrollo del pensamiento matemático.

Caraballo Carmona et al. (2021) realizan un estudio y diagnóstico del desarrollo del pensamiento matemático avanzado. Para ello, aplican una prueba pedagógica a 42 estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación Matemática de la Universidad Pinar del Río de Cuba. Advierten que los estudiantes presentan insuficiencias en los procesos cognitivos-instrumentales como, por ejemplo, la abstracción, la representación, la transferencia y el razonamiento a un nivel superior, insuficiencias muy relacionadas con el desarrollo del pensamiento matemático.

En su investigación, los autores consideran al pensamiento matemático avanzado como la capacidad de abstracción, la formalización del conocimiento, la representación, la definición de los conceptos y la demostración, que son los procesos mentales propios de la matemática superior.

Para hacer un diagnóstico del pensamiento matemático avanzado de sus estudiantes Caraballo Carmona et al. (2021) distinguen dos dimensiones con sus respectivos indicadores. La primera está dirigida al accionar didáctico del profesor, que debe implementar acciones para potenciar la abstracción, la definición de conceptos, la formalización, la representación conceptual y la demostración matemática. La segunda está orientada al accionar del estudiante en la formación y desarrollo de las habilidades descriptas en la primera dimensión.

Realizan una actividad relacionada con los contenidos de límite, continuidad, derivada de una función y demostración matemática. Evalúan ambas dimensiones y utilizan una tabla con los indicadores y una valoración propuesta por ellos. Concluyen que los estudiantes tienen limitaciones de orden teórico y epistemológico en el tratamiento de los contenidos matemáticos. Reconocen que existe una fuerte dependencia entre la racionalización, la abstracción y la utilización de esquemas gráficos para la comprensión de los contenidos matemáticos. Finalmente, destacan que la utilización de recursos heurísticos es fundamental para contribuir al desarrollo del pensamiento matemático avanzado.

En la FRSF se observan características similares a las que describen Mariño Pérez et al. (2021) y Romero Pabón et al. (2021) en los estudiantes de ingeniería. Se conjetura que estas limitaciones podrían estar relacionadas con un insuficiente desarrollo del pensamiento matemático considerando las tres dimensiones propuestas por Díaz Lozada (2018).

Se coincide con la investigación de Rodríguez (2019) que las estrategias heurísticas se aprenden resolviendo problemas. Se observa que los estudiantes poseen heurísticas espontáneas como la de traducir el problema a un lenguaje algebraico pero que carecen de estrategias tales como la introducción de elementos auxiliares o la examinación de casos particulares.

Las tres investigaciones coinciden en la importancia de fortalecer el pensamiento matemático en la formación de los ingenieros. Se destaca la relevancia tanto de la utilización de los recursos heurísticos como la reflexión metacognitiva en el momento de la resolución de problemas.

1.3. Objetivos de la investigación y Marco metodológico

Como se ha señalado, el ingeniero debe dar respuestas a demandas y problemas de la sociedad actual de forma eficiente, creativa y sostenible. Para ello, desde la formación inicial del ingeniero se debe fomentar el desarrollo del pensamiento matemático por sobre la transferencia del conocimiento acabado. Se ha constatado en las investigaciones revisadas que la resolución de problemas en contexto promueve el pensamiento lógico-deductivo, el desarrollo de herramientas heurísticas y de la metacognición del estudiante, dimensiones consideradas en esta tesis para caracterizar al pensamiento matemático. A partir de estos supuestos se enuncian los objetivos de la investigación.

1.3.1. Objetivo General

El objetivo general de la investigación es explorar potencialidades y limitaciones de una secuencia de problemas para promover el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de ingeniería de la FRSF-UTN.

1.3.2. Objetivos específicos

1. Diseñar, implementar y evaluar una secuencia de problemas propios de la Ingeniería para promover el desarrollo del pensamiento matemático.
2. Identificar evidencias del uso del razonamiento lógico-deductivo en las producciones de los estudiantes.
3. Caracterizar los procesos heurísticos evidenciados en las estrategias implementadas por los estudiantes.
4. Describir los procesos de metacognición puestos en juego durante la resolución de los problemas.

1.3.3. Marco metodológico

El profesor universitario está en constante formación y reflexión sobre su propia práctica. La investigación educativa promueve la participación activa del docente en su práctica profesional como investigador de la misma. Dentro de la investigación educativa se encuentra la investigación-acción propuesta por Elliott (1997) con cuatro características significativas: cíclica y recursiva, participativa, cualitativa y reflexiva.

Latorre (2005) afirma que “la investigación tradicional se ha enfocado más a crear las teorías sobre la educación que a mejorar la práctica educativa, separando y distanciando a quienes investigan en educación de quienes están en la práctica” (p. 8). En la investigación-acción el docente es el promotor principal de la investigación. Siendo el docente el investigador de su propia práctica profesional con el fin de mejorar la calidad de la educación.

La metodología propuesta para el desarrollo de esta tesis es la Investigación-Acción. Se trata de un estudio cualitativo en torno al diseño, implementación y evaluación de una secuencia de problemas con las que se espera promover el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de la asignatura Análisis Matemático II (AMII), del curso recursantes de las carreras de Ingeniería Civil, Industrial, Mecánica y Sistemas de Información, de la Facultad Regional Santa Fe, Universidad Tecnológica Nacional.

Esta metodología es la que mejor se adecúa para esta investigación, ya que establece relaciones entre la teoría y la práctica. La Investigación-Acción, en educación, es un tipo de investigación aplicada que se realiza en el aula para recoger información de manera sistémica, de forma participativa, reflexiva, comprensiva y crítica, cuyo propósito es plantear soluciones racionales y adecuadas a problemas detectados. Se trata de una doble estrategia, investigación y acción, que relaciona estrechamente al sujeto investigador con el objeto de investigación con técnicas cualitativas o cuantitativas (Corral et al., 2016).

Algunos de los rasgos que definen la Investigación-Acción, descriptos por Corral et al. (2016), son:

- Acción, incorpora la investigación educativa a la práctica en el aula, orienta a mejorar la acción y contribuye a resolver problemas con una visión dinámica de la realidad e implica a los docentes a ser protagonistas de sus investigaciones.

- Investigación, posee rigor metodológico. Una de las características es que permite volver, las veces que sea necesario, sobre los datos recolectados para reinterpretarlos y contrastarlos con nuevas fuentes, lo que le da el carácter de flexible. En un análisis cualitativo, además de registrar de modo descriptivo lo que sucede, también recopila y analiza juicios, reacciones e impresiones del investigador. Se pueden incorporar herramientas para la recolección de información de naturaleza cuantitativa, como encuestas y pruebas.

- La coparticipación del docente-investigador y los participantes de la investigación, lo que le da un enfoque democrático. Para cambiar una realidad concreta se debe involucrar al grupo entero, gracias a ella los participantes pueden trabajar por mejorar su propia práctica y la de los demás.

Las cuatro fases de la Investigación-Acción son la observación, la planificación, la acción y la reflexión (Corral et al., 2016). A continuación, se describen las actividades realizadas en el marco de cada una.

En la fase de observación se realiza un diagnóstico de la situación inicial. Se identifican los problemas propios de la enseñanza memorística tradicional de la asignatura AMII, que actualmente centra su enseñanza en torno al estudio de contenidos de tipo conceptual, caracterizada por un franco predominio de la exposición de los temas neurálgicos por parte del docente. La parte práctica consiste en la resolución de ejercicios habitualmente de manera memorística y mecánica, sin dar lugar a la reflexión.

En la etapa de planificación, se plantean diversas estrategias didácticas para generar pensamientos lógicos, críticos y autónomos de los estudiantes, haciendo un uso activo del conocimiento. Se propone la resolución de problemas mediante la implementación de cuatro coloquios que los estudiantes deben resolver empleando los conocimientos de la asignatura, utilizando diferentes heurísticas y promoviendo la metacognición.

Se diseña una secuencia de problemas que se intercala con los temas habituales del cursado regular de la materia, pretendiendo generar interés, curiosidad e inventiva al hacer matemática, valorando la aplicación matemática tanto en la experiencia cotidiana como en los problemas de ingeniería.

En la fase de acción se ponen en práctica los coloquios planificados, observando los progresos y dificultades de los estudiantes en términos de interpretación, resolución, argumentación y el uso de diversos esquemas de representación y comunicación. Las producciones de los estudiantes se analizan en el capítulo 3 y constituyen el principal conjunto de datos de la presente tesis.

En la fase de reflexión, se realiza un análisis crítico sobre los procesos, problemas y restricciones que se manifiestan. Se obtienen conclusiones sobre la efectividad de la secuencia de problemas para el desarrollo del pensamiento matemático.

El desarrollo del pensamiento matemático es meramente el resultado del trabajo y la reflexión personal de cada estudiante. La secuencia tiene una dificultad progresiva de acuerdo al desarrollo de la materia y sus contenidos. En la convivencia entre las clases tradicionales y las clases destinadas a desarrollar los distintos tipos de pensamiento matemáticos se pone énfasis en educar ingenieros que sean creativos, innovadores, pero sobre todo que puedan pensar.

La información recolectada en los coloquios se complementa con las respuestas de los estudiantes a cuestionarios que se administran a continuación de cada coloquio. Estos cuestionarios (Anexo N°1) se proponen con el objetivo de recabar información sobre la metacognición de los estudiantes que no se puede detectar en la entrega escrita ni en la exposición oral. La inclusión de consignas metacognitivas apunta a que los estudiantes desarrollen aspectos metacognitivos que muchas veces realizan de forma inconsciente, invitándolos a reflexionar sobre su propio hacer cognitivo.

La investigación-acción es una herramienta para mejorar la calidad educativa ya que el docente puede indagar e investigar sobre los problemas que observa en su práctica docente. Como afirma Elliott (1997) "la investigación-acción se relaciona con los problemas prácticos cotidianos experimentados por los profesores [...] y puede ser desarrollada por los mismos" (p. 24).

Es por lo expuesto por Elliott (1997) que el rol del docente (la autora de la tesis) es el de docente-investigador. La metodología investigación–acción permite que el docente cumpla con una doble función. Por un lado, estar a cargo del dictado de las clases de teoría y práctica de acuerdo con el cronograma establecido por la cátedra. Y por el otro, recoger información, aplicar la secuencia de problemas e interpretar resultados, lo que permite al docente ser el protagonista de su investigación.

1.3.4. Caracterización del entorno

La Universidad Tecnológica Nacional (UTN) fue creada como Universidad Obrera Nacional (UON) el 19 de agosto de 1948 por el Artículo 9º de la Ley N º 13.229. Inició sus actividades docentes el 17 de marzo de1953. Al mismo tiempo que la Regional Buenos Aires, iniciaron sus actividades las Facultades Regionales de Santa Fe, Rosario y Córdoba, respondiendo a demandas puntuales de cada región. El 14 de octubre de 1959, por Ley Nº 14.855, la UON se desvinculó de la Comisión Nacional de Aprendizaje y Orientación Profesional (CNAOP), pasó a denominarse UTN y adquirió autarquía procediendo a manejar su propio presupuesto. Luego de la sanción de la Ley Nº 16.712 del 2 de septiembre de 1965, se incorporó plenamente al Sistema Universitario Argentino en un plano de total igualdad con las restantes universidades nacionales[2].

El curriculum de las cinco carreras que se dictan en la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Santa Fe propone un equilibrio entre lo académico y lo profesional. Se centra en los conocimientos y en el interés por los saberes, pero también se vincula con su futura vida profesional y laboral. Los planes de estudios, que tienen una duración de cinco años, están constituidos por asignaturas donde el 90% de ellas son obligatorias y el resto son electivas. La estructura curricular es por columna y se organizan en cuatro bloques: ciencias básicas, tecnología básica, tecnología aplicada y complementaria. Las asignaturas de las ciencias básicas Camilloni (2016) las define como "formación general" brindando conocimientos comunes a las cinco carreras de grado. Por ejemplo, la carrera de Ingeniería Industrial (Ordenanza N° 1114 del Consejo Superior) tiene 42 materias de las cuales el 20% corresponde a las ciencias básicas, el 35% a tecnología básicas, el 30% a tecnología aplicada y el 15% a las complementarias. La asignatura AMII, en el marco de la cual se desarrolla la presente investigación, corresponde al bloque ciencias básicas.

1.3.5. Selección de los sujetos de estudio

La secuencia de problemas basada en la resolución de problemas ingenieriles se aplicó en un curso cuatrimestral de la materia AMII perteneciente al departamento de Materias Básicas de la FRSF-UTN. Este curso está dirigido a estudiantes recursantes, es decir, a estudiantes que ya obtuvieron la regularidad de la materia en alguna oportunidad. Hay que tener en cuenta que en la FRSF no se pierde la regularidad de una materia, aunque transcurran muchos años.

Para obtener la regularidad de AMII se debe aprobar un trabajo práctico en cada cuatrimestre y un trabajo de laboratorio. Los trabajos prácticos son exámenes donde el estudiante debe resolver ejercicios en forma individual y se aprueban con la obtención de un puntaje no inferior al 50%. El trabajo de laboratorio consiste en ejercicios que se resuelven con la ayuda de un software en forma individual.

[2] Fuente: https://utn.edu.ar/es/la-universidad/institucional

La cursada de AMII para los que cursan por primera vez la asignatura es anual. Sin embargo, los estudiantes recursantes tiene la opción de cursarla nuevamente de forma cuatrimestral en el segundo cuatrimestre, es decir, en el período agosto-noviembre.

Los estudiantes inscriptos para cursar el cuatrimestral de AMII debieron cumplir dos condiciones: tener aprobadas las dos materias correlativas, es decir, aprobadas las materias Análisis Matemático I y Álgebra y Geometría Analítica. Además, se exigía haber obtenido la regularidad de la misma hasta el año 2019. Estos criterios de selección se implementaron para evitar que asista un número excesivo de estudiantes, lo cual podría dificultar la tarea docente y el análisis de datos. El número total de estudiantes que cumplían con ambos requisitos fueron 41, pero solo 36 de ellos comenzaron la cursada.

La experiencia se realizó en el segundo cuatrimestre del año 2021. Como consecuencia de la pandemia causada por el virus SARS-COVID 19 la UTN debió migrar de la presencialidad a la virtualidad. Es decir, que tanto el dictado de clases como la toma de exámenes se comenzó a realizar en forma virtual. Por ello toda la experiencia fue realizada en forma virtual a través de un campus virtual de la FRSF y de la plataforma Microsoft Teams. En el campus virtual se subía material bibliográfico, teórico y práctico de libre navegación para que el estudiante accediera según su disponibilidad horaria. En cambio, en Microsoft Teams se dictaban las clases sincrónicas de práctica y de consulta.

Cada semana los estudiantes debían ver los videos correspondientes a los temas según el cronograma de clases. Las clases teóricas, a cargo de la docente-investigadora y autora de esta tesis, consistían en videos explicativos teóricos-prácticos donde se desarrollaban definiciones, teoremas, demostraciones, entre otros. También se presentaban diversos ejemplos donde el estudiante podría comprender mejor los conceptos ejecutando distintas resoluciones.

En las clases prácticas, a cargo de la docente-investigadora, se resolvían ejercicios y problemas extraídos tanto del libro Stewart (2008) como de exámenes tomados por la cátedra. Dichas clases eran de forma colaborativa, donde los estudiantes participaban de forma activa en vez de pasiva-receptiva.

Los coloquios consistían en problemas asignados a cada grupo de estudiantes. Los mismos fueron cuatro y se distribuyeron a lo largo de todo el cuatrimestre. Cada uno de ellos versaba en torno a contenidos de cada unidad del programa de AMII y se administraba al finalizar el desarrollo de los temas de la unidad. A cada grupo se le asignaron consignas diferentes entre sí, pero de complejidad similar para su resolución.

En la siguiente tabla se resume información acerca de los temas previos a cada coloquio.

Tabla 1

Contenidos de cada unidad de AMII

Unidad 1	Funciones vectoriales y curvas en el espacio Derivadas e integrales de funciones vectoriales Longitud de arco y curva. Aplicaciones de la longitud de curva Movimiento en el espacio: velocidad y aceleración
Unidad 2	Funciones de varias variables Límites y continuidad Derivadas parciales Planos tangentes y aproximaciones lineales Regla de la cadena Derivadas direccionales y su vector gradiente Valores máximos y mínimos
Unidad 3	Integrales dobles sobre rectángulos Integrales iteradas Integrales dobles sobre regiones generales Integrales dobles en coordenadas polares Aplicaciones de las integrales dobles Integrales triples Integrales triples en coordenadas cilíndricas Integrales triples en coordenadas esféricas
Unidad 4	Campos vectoriales Integrales de línea Teorema fundamental de las integrales de línea Teorema de Green Rotacional y divergencia Superficies paramétricas y sus áreas Integrales de superficie Teorema de Stokes Teorema de la divergencia

Además de los coloquios, para promocionar AMII los estudiantes debían aprobar las evaluaciones de seguimiento implementadas antes de presentar en forma escrita las resoluciones de los coloquios. Las mismas consistían en cinco ejercicios teóricos-prácticos de nivel medio de complejidad.

Los grupos de trabajo de los estudiantes fueron conformados por ellos mismos. En caso de no tener grupo la docente les seleccionaba uno, el 84% de los grupos los formó la docente en forma aleatoria. Esta agrupación permaneció constante a lo largo de toda la experiencia. Se formaron 12 grupos de tres integrantes, solo uno de ellos abandonó el cursado de la materia porque los tres estudiantes trabajaban y hubo discrepancias entre ellos. De los 11 grupos restantes se seleccionaron 8 para hacer un estudio más profundo. Se descartaron tres grupos porque dos de ellos no interpretaron las consignas de los coloquios y no presentaron las resoluciones. El otro grupo se descartó porque sus integrantes no se pusieron de acuerdo y en el último coloquio presentaron las resoluciones en forma separada.

Se realizó un análisis profundo de dos grupos elegidos al azar. En el análisis de sus producciones (desarrollado en el Capítulo 3) se incluyen las descripciones de las dimensiones del pensamiento matemático y los indicadores utilizados para el análisis (ver Tabla 2 de la sección 3.2). No obstante, se presentan conclusiones generales de las resoluciones de los coloquios de los ocho grupos.

CAPÍTULO 2: Marco teórico

2.1. Pensamiento matemático

La matemática además de ser una herramienta para otras ciencias, establece un modelo de pensamiento propio. Entre sus características figuran el empleo de expresiones lógicas, el uso de simbología, la necesidad de reflexionar, y "el manejo de procesos que influyen, de manera significativa, en el modo de pensar de los estudiantes" (Díaz Lozada y Díaz Fuentes, 2018, p.60). Esta forma de pensar característica se lo conoce como pensamiento matemático.

Antes de profundizar en la noción de pensamiento matemático, interesa definir lo que es el pensamiento. Sánchez (2001, citado por Bojorquez Gutiérrez, 2021, p. 20) afirma que "el pensamiento se presenta en actividades que tienen que ver con recordar, aprender, la solución de problemas, la definición de conceptos, comprender, percibir y reconocer estímulos". Sostiene que el pensamiento está ligado a tres mecanismos principales: el sistema de la memoria a largo plazo, el sistema de búsqueda selectiva capaz de resolver problemas e inducir reglas y el sistema de construcción de representaciones para nuevos problemas.

Mayer (1983, citado por Bojorquez Gutiérrez, 2021, p. 20) propone una definición de pensamiento con tres procesos mentales básicos, afirma que "pensar es cognoscitivo y sucede internamente en la mente del sujeto. Pensar es un proceso que involucra la manipulación de operaciones sobre conocimiento y pensar es un proceso dirigido que permite resolver problemas".

No existe una definición formal del pensamiento matemático, ya que se encuentra en continua revisión y expansión. Por ser tan complejo este concepto existen múltiples interpretaciones y puntos de vistas. Autores como Koliaguin (1975, citado por Díaz Lozada, 2018), y Shoenfeld (1992, citado por Díaz Lozada, 2018), entre otros reconocen que "el desarrollo del pensamiento matemático demanda del estudiante una actividad intelectual constante: el análisis, la comparación, la fundamentación, la demostración y la generalización, entre otras" (Díaz Lozada, 2018, p. 24).

Schoenfeld (1992, citado por Díaz Lozada y Díaz Fuentes, 2018) considera que pensar matemáticamente supone investigar soluciones, explorar patrones y formular conjeturas, no hacer ejercicios. Sostiene que se puede caracterizar con cuatro rasgos: el dominio del conocimiento, los métodos heurísticos, el control y el sistema de creencias.

Dentro de estas características se encuentran aspectos característicos relacionados con la lógica y la heurística, pero también contiene aspectos subjetivos como los criterios personales y las creencias, necesarios para resolver problemas.

Reyes-Santander (2015, p. 14) considera que:

> el pensamiento matemático es un proceso cognitivo (neurobiológico), que vincula percepciones, contenidos, capacidades y estrategias, este se produce cuando el individuo se encuentra en situaciones o problemas relacionados con contenidos matemáticos, que son para el individuo, interesantes o que presentan un desafío a su estructura cognitiva personal.

Como hemos indicado en el primer capítulo, Díaz Lozada (2018) afirma que el pensamiento matemático se identifica con tres dimensiones esenciales:

- el razonamiento lógico-matemático
- la heurística como recurso de búsqueda
- la metacognición que permite valorar la actividad mental que se realiza.

La primera dimensión es la cognitiva, que abarca a los conocimientos matemáticos con los que trabaja el estudiante. La segunda es la operacional, que comprende a las operaciones mentales que se despliegan en el estudiante. Y la tercera es la procesal, que incluye los procesos que regulan las acciones mentales que componen los conocimientos matemáticos con las operaciones del pensamiento.

De la dimensión procesal se despliegan tres subdimensiones con sus respectivos indicadores (Díaz Losada, 2018; Díaz Losada y Díaz Fuentes, 2018). Los indicadores para la medición de estas dimensiones esenciales del pensamiento matemático que permiten que su evaluación sea tangible son:

- Razonamiento lógico-deductivo: Aplicar conceptos y proposiciones, organizar y representar la información que brinda el problema, deducir consecuencias de los datos del problema, argumentar y demostrar proposiciones.
- Heurística: identificar nexos y relaciones, variar las condiciones iniciales del problema, identificar casos especiales y casos límites, explorar diferentes vías de solución.

- Metacognición: evaluar los pasos que se realizan, controlar la ejecución de la vía de solución, reflexionar acerca de la vía de solución, identificar alternativas de vías de solución, lograr precisión en la estructura de la vía de solución.

Estas dimensiones resultan de especial interés en la presente investigación, puesto que se toman como referencia para caracterizar las producciones de los estudiantes durante la resolución de los problemas propuestos en el trabajo de campo. A continuación, se desarrolla cada una.

2.1.1. Aportes sobre el Razonamiento Lógico-Deductivo

Lo que pretende la educación y sobre todo la universidad es formar estudiantes que piensan. El concepto de enseñar a pensar lo retoma García García (1998) afirmando que es un nuevo paradigma en el cual:

> se entiende el proceso educativo como la forma en que los sujetos alcanzan el desarrollo de sus habilidades de pensamiento e intelectuales, con el cual conquistan la autonomía y la independencia cognitiva necesaria para aprender por sí solos y para producir nuevos conocimientos (1998, p.147).

Como ingenieros se pretende que dominen y apliquen el pensamiento lógico. Serna y Flórez afirman que "deben desarrollar la capacidad lógica-interpretativa y abstracta para alcanzar ese pensamiento" (2013, p. 2). Asevera, además, que la instrucción del pensamiento lógico se debe dar desde los primeros niveles educativos para poder potenciarlo y aplicarlo apropiadamente.

Serna y Flórez (2013) sostienen que el curriculum en las carreras de ingeniería no integra a la matemática con las demás asignaturas, saturando a los estudiantes con fórmulas y conceptos cuya aplicación es casi inexistente.

Carrol (1964, citado por Serna y Flórez, 2013) hace hincapié en que el razonamiento lógico es la habilidad para estructurar y enunciar procedimientos lógicos y aplicarlos en un lenguaje preciso. En cambio, Smith (1992, citado por Serna y Flórez, 2013) sostiene que el pensamiento está fuertemente ligado a las cadenas de razonamientos y que para ello se requiere una capacidad lógica para interrelacionar dichos razonamientos.

Serna y Flórez concluyen que las diferentes profesiones generan razonamientos lógicos diferentes y esto es debido a la posición desde donde se razona. "Estas diferencias tiene como base una serie de factores, entre los que se incluyen la cultura, los valores, los roles, las tareas y las personalidades, pero sobre todo, la capacidad de comprender los problemas mediante razonamiento lógico” (Serna y Flórez, 2013, p. 4).

La lógica combina dos tipos de pensamiento, el pensamiento intuitivo, que es espontáneo, automático y subconsciente, con el pensamiento normativo, que es el pensamiento con normas, requiere esfuerzo, se manifiesta de modo consciente y serial. Se considera al pensamiento como una administración de afirmaciones que generan un nuevo pensamiento. Los estudiantes como futuros ingenieros necesitan desarrollar el pensamiento para combinar capacidades como los procesos cognitivos, la memoria y la flexibilidad (Serna y Flórez, 2013).

La educación matemática, en ocasiones, enfatiza el desarrollo de habilidades algebraicas y desatiende la búsqueda de comprensión de los conocimientos. Los mismos se vuelven ingenuos, ya que los estudiantes captan los conocimientos matemáticos de manera superficial, y en consecuencia no pueden hacer el traspaso de la teoría a la práctica. El objetivo es fomentar el conocimiento que no se acumula, sino que sirve enriqueciendo la vida de las personas, ayudándolas a comprender el mundo y a desenvolverse en él, lo que Perkins (1995) denomina conocimiento generador. Tiene tres reglas generales: retención del conocimiento, comprensión del conocimiento y uso activo del conocimiento. Perkins resume esto en un simple enunciado: ‘’El aprendizaje es una consecuencia del pensamiento. Sólo es posible retener, comprender y usar activamente el conocimiento mediante experiencias de aprendizaje en las que los estudiantes reflexionan sobre lo que están aprendiendo y con lo que están aprendiendo’’ (Perkins, 1995, p. 21).

Según Dewey el papel esencial de la enseñanza es la reflexión, “aprehender el significado de una cosa, un acontecimiento o una situación es contemplarlo en sus relaciones con otras cosas, observar cómo opera o funciona, qué consecuencias se sigue de él, qué lo produce, qué utilidad puede dársele’’ (1989, p. 125). Aprehender un conocimiento es hacerlo propio, es construirlo con sentido para sí mismo, es asimilarlo o comprenderlo por completo, dándole sentido o lógica y sobre todo siendo un agente activo en su propio proceso de aprendizaje. En resumen, el estudiante debe ser intelectualmente responsable adquiriendo un hábito de pensamiento reflexivo.

Cuando se le solicita a un estudiante que pruebe una afirmación, es muy habitual que apele a la verificación sabiendo (o quizá ignorando) que no es el proceso adecuado que se establece como demostración. Este tipo de validación se da en general cuando el estudiante no sabe cómo generar una prueba o demostración. La formalidad matemática exige que los estudiantes sepan la diferencia entre una demostración y una simple constatación experimental. Si bien se espera que un ingeniero sepa demostrar sus afirmaciones, la realidad es que esa rigurosidad matemática no es tan rígida.

Es necesario generar actividades que obliguen al estudiante a poner en tela de juicio sus argumentos para que constaten que no se pueden quedar solo con las observaciones iniciales o conjeturas muchas veces ingenuas. Balacheff afirma "uno se desespera de que los estudiantes no experimenten la necesidad de demostrar" (2000, p. 4).

Para que un estudiante adquiera una racionalidad matemática es necesario conducirlo hacia ella. Balacheff (2000, p. 13) define el razonamiento como la "actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información". El autor también afirma que, para conseguir el razonamiento se debe descubrir y tener en cuenta la racionalidad que los estudiantes tienen inicialmente, saber cómo funciona y cómo puede evolucionar.

Según Sriraman y Umland (2020) la argumentación en el aprendizaje de la matemática intenta mostrar o explicar la veracidad de una afirmación. Las argumentaciones pueden ser formales o informales. Las diferentes formas de argumentar de los estudiantes dependerán del sistema de creencia que tiene el docente sobre qué habilidades para producir una argumentación debe poseer el estudiante. La exigencia para producir una argumentación formal a un estudiante de matemática no es igual que la que corresponde a un estudiante de ingeniería. La rigurosidad de las demostraciones no son un requisito básico en la enseñanza de un futuro ingeniero y muchas veces con una simple explicación se toma como válida una afirmación.

Balacheff (2000) diferencia los términos explicación, prueba y demostración. Una explicación es un discurso que pretende hacer evidente la verdad de una proposición ya adquirida por el locutor. Tiene sus propias reglas de decisión de la verdad, puede carecer de una cadena deductiva y se expresa generalmente en un lenguaje natural.

Cuando la explicación pasa por un proceso social donde el discurso que asegura su validez es aceptado por una comunidad se llama prueba. Una prueba puede cambiar con el tiempo y lugar, es decir, que una comunidad puede aceptar una prueba, pero puede ser rechazada por otra.

La demostración es una serie de enunciados organizados según un conjunto de reglas. Tiene un discurso estrictamente codificado y tiene un valor de verdad común a todas las comunidades. Por ejemplo, en la comunidad matemática la demostración de un teorema es aceptada en cualquier tiempo y lugar.

Balacheff (2000) define el proceso de validación como una actividad intelectual con la finalidad de asegurar la validez de una proposición y, eventualmente, generar una explicación, prueba o demostración. Para generar un proceso de prueba en la resolución de problemas, el autor considera necesario que las consignas tengan dos elementos: un riesgo motivador por la incertidumbre y un desafío que valga la pena. Y también que contenga un desafío para despertar el interés por formular una respuesta elaborada y discutida.

El proceso de validación depende principalmente de la situación. Si un estudiante debe validar una afirmación esta dependerá del contexto en el que opera, de la naturaleza del conocimiento con que cuenta y del compromiso. Audibert (1982, citado por Balacheff, 2000, p.15) afirma "son muy pocos los estudiantes que realmente se interesan en un proceso de producción de prueba, aún menos los que realizan una demostración".

Existen situaciones que no conducen necesariamente a la realización de una explicación o prueba, por ejemplo, cuando se deben aplicar algoritmos, ejercicios de resolución mecánica o prácticas con resoluciones que no cambian. El estudiante no se siente obligado a justificar su accionar o su secuencia de razonamientos lógicos. Por eso, es importante generar actividades en las que el estudiante tenga la necesidad de producir una prueba.

Una herramienta de validación es el uso de una gráfica. La prueba está en la capacidad de quien la observa para reconstruir las razones que el emisor tiene en mente y que no puede expresarlas con palabras.

Balacheff (2000) denota pruebas pragmáticas a las pruebas que están ligadas a la acción y la experiencia. En cambio, las pruebas intelectuales son formas particulares de pensar donde se articulan argumentos en un lenguaje simbólico. A su vez, distingue cuatro tipos de pruebas pragmáticas e intelectuales que se encuentran en el proceso de validación. Ellas son: el empiricismo ingenuo, la experiencia crucial, el ejemplo genérico y la experiencia mental.

El empiricismo ingenuo (Balacheff, 2000) supone tomar como válida una afirmación luego de haber verificado algunos casos. Esta prueba no garantiza la veracidad por ser un método de validación rudimentario e insuficiente.

Cuando una experiencia permite elegir entre dos hipótesis, siendo que una de ellas es verdadera, se llama experiencia crucial (Balacheff, 2000). Si se rechaza una hipótesis, por alguna razón, no implica que la otra sea verdadera. También se llama experiencia crucial cuando se busca un ejemplo no particular que verifica la proposición de un caso esperando que funcione para siempre.

El ejemplo genérico (Balacheff, 2000) está basado en la elección de un ejemplo que sirve como representante de su clase. Aunque el ejemplo sea particular pretende ser abstracto y válido para los demás de su clase. Con ese representante característico se explican las razones de la validez de la afirmación.

La experiencia mental se basa en la acción e interiorización, separándose de ejemplos particulares (Balacheff, 2000). El razonamiento es independiente de dichos casos particulares y se realiza un razonamiento deductivo para aseverar la validez de una afirmación. Acudir a una experiencia mental transforma una prueba pragmática en una prueba intelectual.

Dentro del proceso de prueba conviven los conocimientos, las intuiciones, la observación de regularidades y analogías, entre otros. Para lograr una prueba intelectual y no pragmática, el estudiante debe tener un trabajo previo de descubrimiento de pruebas que involucra la elaboración, la contrastación y la valoración de conjeturas.

2.1.2. Aportes sobre la Heurística

La heurística ayuda al docente a guiar al estudiante hacia el descubrimiento de suposiciones, hipótesis y reglas. El papel de las preguntas es importante para movilizar la actividad mental. Vigotsky (2007) define la zona de desarrollo próximo, como la distancia entre el nivel de desarrollo real del estudiante, tal como puede ser determinado a partir de la resolución independiente de problemas, y el nivel potencial, determinado por la resolución de problemas bajo la guía del docente. Afirma que el estudiante es capaz de realizar en colaboración mucho más que por sí mismo. El docente a través de sus preguntas estimula al estudiante a transitar por cada una de las dimensiones del pensamiento matemático.

La heurística se utiliza cuando el estudiante se enfrenta a la tarea de resolver un problema. Se pone en juego en momentos de incertidumbre, exploración e indecisión. Rodríguez (2015) menciona algunas heurísticas más comunes como: utilizar un método de expresión o representación adecuado, razonar por analogía, recurrir a dibujos o esquemas, considerar casos particulares, trabajar desde el final, entre otros.

Cuando se habla de heurísticas, se hace referencia a las estrategias heurísticas, que son los diferentes medios y modos que están implicados en la resolución de un problema. Autores reconocidos como Polya (1989) trabajan estas diversas estrategias para no solo encontrar o aproximarse a la solución de un problema, sino también para la apropiación del conocimiento implicado.

Otros autores como Verschaffel (1999, citado por Rodríguez, 2015, p. 156) definen a las heurísticas como "estrategias sistemáticas de búsqueda para el análisis y transformación del problema". Dichas estrategias no dependen del contexto y se activan a la hora de resolver un problema. El estudiante decide cuál estrategia utilizar según el problema, las herramientas con las que cuenta y el manejo que tiene de las heurísticas.

Marino y Rodríguez (2009) consideran que las diversas estrategias heurísticas son enseñables. El docente puede tomarlas como objeto de estudio o generar actividades donde el estudiante se vea obligado a la exploración de las mismas. Por ello, definen heurísticas espontáneas a aquellas que no fueron enseñadas con anterioridad a los estudiantes de manera intencional.

La resolución de problemas requiere de un esfuerzo intelectual y no de una mera activación de la memoria o aplicación mecánica de un algoritmo. Cuando un estudiante intenta resolver un problema apela a diferentes estrategias que lo ayuden a comprenderlo y encarar una solución.

Para Siñeriz y Ferraris la heurística "atiende a los modos y medios de resolución de problemas que pueden describirse independientemente del contenido concreto del problema y que no suponen garantía de obtener la solución del mismo" (2021, p. 1).

En el proceso de validación se pueden utilizar diversas heurísticas, y muchas veces estos razonamientos no siguen patrones de la lógica formal. Polya (1989) define al razonamiento plausible como los razonamientos viables que no transmiten la verdad de las premisas a la conclusión, pero aumentan la creencia de que la conclusión es verdadera. Y define a los patrones plausibles para las operaciones mentales usadas en los razonamientos plausibles. Dentro de los patrones plausibles podemos encontrar: la abducción, la sobregeneralización de la no validez, la analogía no aclarada y la ausencia de tercera posibilidad.

El uso de las estrategias heurísticas facilita la resolución de un problema o ayudan a comprender el proceso hasta llegar a la solución. Las heurísticas tienen diferentes naturalezas, pero estas comprenden, por ejemplo, el dibujo de figuras, la introducción de notación apropiada, la exploración de problemas relacionados y trabajar hacia atrás, conjeturar y verificar.

Siñeriz y Ferraris (2021) identifican cuatro clases de heurísticas:

- Los métodos: proveen formas de organización para solucionar el problema. Entre ellos se encuentran: método de análisis síntesis, métodos de Lakatos, método de la rendición, método de exclusión de monstruos, método de ajuste de monstruos, método de exclusión de excepciones y método de incorporación de lemas.
- Las herramientas: transforman el contenido del problema en otro para tratar de encontrar la solución. Algunas herramientas son: consideración de un caso, examen de posibilidades, paso al contrarrecíproco, reducción al absurdo y la analogía aclarada.
- Las sugerencias generales: marcan una dirección de trabajo sin relacionarla con ningún procedimiento concreto.
- Las destrezas: requieren la habilidad de dominar una actividad o algoritmo determinado. Pueden ser: instrumentales, por ejemplo, el uso de instrumentos de geometría o exactitud en las gráficas; organizativas, por ejemplo, realizar una figura o imagen para representar una información y comunicativas, por ejemplo, el uso de notación simbólica y coloquial.

Siñeriz y Ferraris consideran que los razonamientos heurísticos “a menudo subyacen de forma viciada en las decisiones y respuestas de los estudiantes, quienes consideran verdaderas a las conjeturas o a las conclusiones obtenidas a partir de ellos, obviando hacer la validación correspondiente” (2021, p. 10). En ocasiones, los estudiantes no ven la necesidad de argumentar o validar una afirmación que puede contener una verdad, contener solo una parte de verdad o ser totalmente falsa. Por eso, es importante generar actividades que obliguen al estudiante a someterse en un proceso de validación ante cualquier conjetura.

Otros autores como Came López et al. (2016) exploran otras estrategias heurísticas para la resolución de problemas como: recurrir a teoría relacionada, recurrir a problemas o situaciones análogas, recurrir a dibujos, esquemas, diagramas o gráficos, descomponer el problema en subproblemas y analizar casos particulares para buscar regularidades o patones para luego generalizarlo, entre otros.

Para empezar a pensar qué significa la heurística, se ilustrará con un ejemplo sencillo y clásico de la matemática, presentado por De Bono (1991). Se parte de un torneo de ajedrez eliminatorio donde dos contrincantes, elegidos al azar, se enfrentan en una partida. El ganador pasa a la siguiente ronda y el perdedor queda eliminado. Se desea saber la cantidad de partidas que se va a jugar en dicho torneo si hay N jugadores.

En la primera ronda hay N jugadores donde se juegan N/2 partidas si N es par y $\frac{N-1}{2}$ si N es impar (puesto que hay un jugador que no juega y pasa directo a la siguiente ronda). En la siguiente ronda pasa algo similar, N/4 si N/2 es par o $\frac{N-1}{4}$ si N/2 es impar.

Así sucesivamente se puede inducir la cantidad de partidas en las rondas siguientes hasta obtener un ganador. Luego se suma la cantidad de partidas y se obtiene la cantidad total de partidas celebradas durante todo el torneo.

Pero se puede pensar desde otro punto de vista, pensar que de los N jugadores sólo ganará uno. Es decir, perderán N-1 jugadores, por lo que se celebrarán N-1 partidas durante todo el torneo.

Este ejemplo muestra que, si bien no hay una única forma de resolver un problema, existen varias vías de solución. Si se va por el primer camino que se piensa, lo más probable es que se llegue a la solución, pero ese camino implicó hacer cálculos y tener algunos conocimientos previos sobre el tema, en este caso series numéricas.

Si la persona que intenta resolver el problema se toma el tiempo suficiente para pensarlo y ver las distintas aristas del problema, podrá interpretarlo desde otra perspectiva y posiblemente encontrar la solución de una manera más sencilla y rápida.

Frente a un problema, generalmente se toma una decisión rápida y se la continúa sin importar las dificultades, sin tomarse el tiempo de reflexionar si esa vía de solución es la adecuada o no. La heurística se encarga de buscar las distintas vías de solución y verificar cuál es la más adecuada.

2.1.3. Aportes sobre Metacognición

González (1998, citado por Rodríguez, 2015, p. 160) define a la metacognición como:

> los conocimientos que una persona tiene acerca de su propia actividad cognitiva; así que su ámbito está vinculado con la toma de conciencia en cuanto a las acciones cognitivas interiorizadas que una persona lleva a cabo cuando realiza algún esfuerzo intelectual.

Justamente, en la resolución de problemas el estudiante debe reconocer cómo trabaja y cuáles son sus acciones, en definitiva, el estudiante debe ser consciente de su propio proceso.

La adquisición de habilidades, capacidades y competencias matemáticas permitirá a los estudiantes continuar aprendiendo de forma autónoma durante toda su vida. Serán capaces de aplicar los conocimientos adquiridos, el razonamiento y el análisis para la resolución de problemas ingenieriles. Podrán formular problemas, aplicar distintas estrategias para resolver problemas, comprobar e interpretar resultados y generalizar las soluciones.

Stillman (2020, p. 609) define a la metacognición como: "Cualquier conocimiento o actividad cognitiva que tenga como objetivo, o regule, cualquier aspecto de la actividad cognitiva, es decir, el conocimiento y el pensamiento sobre el propio pensamiento". Es decir, supone la toma de conciencia sobre las acciones cognitivas que una persona ejecuta durante un esfuerzo intelectual.

El proceso metacognitivo incluye elegir y planificar qué hacer en determinada tarea. Involucra la sensibilidad propia de saber cómo y cuándo aplicar ciertas acciones del pensamiento cognitivo de manera apropiada para una situación específica. Estas acciones dependen de las creencias, ideas y sentimientos que se tenga durante el proceso cognitivo.

Es necesario formar estudiantes más conscientes y autónomos en sus procesos de aprendizaje, aunque el aspecto motivacional y el contexto apropiado son necesario para potenciar el desarrollo de la metacognición. El docente también debe ser consciente de sus prácticas pedagógicas atendiendo a sus propias potencialidades y limitaciones para optimizar este proceso.

Las tareas de reflexión metacognitivas en la resolución de problemas implican que el estudiante reconozca cómo trabaja, controle sus acciones y que sepa ajustar, modificar, reforzar y justificar los resultados obtenidos.

El estudiante debe ser consciente de las dificultades y desafíos en la aplicación de las estrategias metacognitivas. La superación de dichos obstáculos sólo se puede realizar si el estudiante tiene intenciones y realiza el esfuerzo para ello. El razonamiento no se debe realizar por una mera aplicación rutinaria, sino que debe ser respuesta a una dificultad que no se ha podido superar mecánicamente.

En las últimas décadas, autores como Rodriguez (2017), están investigando el papel que juega la metacognición en el aprendizaje. En ocasiones el estudiante no advierte que está haciendo la práctica de la metacognición, por ejemplo, cuando se da cuenta qué tipo de conocimientos le cuesta aprender más que otros, cuando examina todas las opciones para decidir cuál es la mejor o cuando comprende que debe validar un hecho antes de aceptarlo.

Osses Bustingorry y Jaramillo Mora sostienen que:

> el aprendiz competente emplea sus conocimientos metacognitivos para autorregular eficazmente su aprendizaje y, a su vez, la regulación que ejerce sobre su propio aprendizaje, puede llevarle a adquirir nuevos conocimientos relacionados con la tarea y con sus propios recursos como aprendiz. (Osses Bustingorry y Jaramillo Mora, 2008, p. 192).

Para lograr esto debemos fomentar que los estudiantes sean más conscientes y autónomos de su propio aprendizaje. Sin embargo, Osses Bustingorry y Jaramillo Mora aseveran que el papel del docente es fundamental ya que debe ser un educador metacognitivo. Él también debe ser consciente de su propio accionar, planificar, controlar y evaluar su rol como educador.

En el perfil profesional de un ingeniero está explícito que debe ser un buen resolutor de problemas. Desde la educación se debe incitar a que los estudiantes no solo resuelvan el problema usando las estrategias heurísticas, sino que sepan cómo trabajar y controlar sus acciones.

Es muy importante la actividad metacognitiva del estudiante, ya que esta es propia de cada sujeto. Tomar conciencia de los pasos realizados, de las decisiones tomadas, identificar fortalezas y debilidades y modificar o reforzar una solución obtenida son parte de las reflexiones metacognitivas.

Díaz Lozada define a la metacognición como:

> el grado de conciencia o de conocimiento que el estudiante tiene acerca de la actividad mental que realiza, acerca del conocimiento y acerca de las habilidades que posee para controlar estos procesos con el propósito de organizarlos, revisarlos y modificarlos en función de los resultados de su actividad (Díaz Lozada, 2018, p. 47).

Si un estudiante, en la resolución de un problema, evalúa los pasos realizados, controla la ejecución de la vía de solución, reflexiona sobre la vía de solución o logra precisión en la estructura de la vía de solución, está aplicando la metacognición.

Para lograr una mejor metacognición el docente debe estimular en el estudiante el el propio cuestionamiento y la autorregulación, pero es importante darle el tiempo suficiente para la reflexión. Dentro de la planificación de la actividad, como por ejemplo resolver un problema, se debe contemplar el tiempo y espacio para que los estudiantes reflexionen sobre los pasos realizados, las respuestas obtenidas e incluso las dificultadas durante ese proceso. Generar esta reflexión favorece al desarrollo del pensamiento matemático.

Barreiro y Leonian sostienen que:

> no tener control sobre el propio aprendizaje produce en el estudiante una dificultad para enfrentarse a tareas nuevas y desafiantes, pues no reconoce de qué estrategias dispone, le quedan ocultas herramientas a las que podrían apelar y favorece que su aprendizaje quede sumamente ligado a la actividad puntual que resolvió. (Barreiro y Leonian, 2017, p. 44).

Sería muy valioso que el estudiante tome control de su aprendizaje desde los inicios de su educación y no cuando está en la universidad.

Si bien la reflexión metacognitiva es personal, el docente puede propiciar ambientes donde se discutan las estrategias utilizadas por los estudiantes. Esta confrontación ayuda a favorecer el proceder propio y visualizar el ajeno para disponer de ambos en futuras situaciones problemáticas. También ayuda a que el estudiante ajuste, modifique, refuerce y valide los pasos realizados en la resolución de un problema.

Díaz Lozada (2018) sostiene que si el estudiante desarrolla la flexibilidad del pensamiento matemático podrá reconocer sus potencialidades y carencias personales y podrá regular sus actividades mentales, llevándolo a tomar decisiones correctas en la búsqueda de la solución a un problema.

2.2. Resolución de Problemas

Dado que las dimensiones giran en torno a la resolución de problemas, se dedica el presente apartado a este aspecto esencial de la actividad matemática.

Dentro de la didáctica de la matemática se encuentra la línea de resolución de problemas que se focaliza en que los estudiantes adquieran herramientas, elaboren estrategias y desarrollen la habilidad para resolver problemas (Rodríguez, 2015). En situaciones de resolución de problemas que involucren contenidos matemáticos, el docente espera que el estudiante explore, experimente, analice sus progresos y reflexiones sobre sus decisiones. Este enfoque no pone al contenido matemático como centro de la actividad, sino que, valiéndose de él se espera que el estudiante adquiera herramientas y explore diversas estrategias para resolver un problema puntual.

Diferentes autores definieron el concepto de problema de acuerdo al enfoque deseado. Campistrous y Rizo (2007, citado por Díaz Lozada, 2018) definen "un problema es toda situación en la que hay un planteamiento inicial, una exigencia que obliga a transformarlo y la vía para lograr la transformación es desconocida" (p. 16).

En cambio, Labarrere (1996, citado por Rodríguez, 2015, p.155) enuncia:

> un problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades de y entre los objetos que no son accesibles directa e indirectamente a la persona, es toda relación en la cual hay algo oculto para el sujeto, que éste se esfuerza por hallar.

Por otro lado, Colombano et al. (2009, citados por Rodríguez, 2019, p. 28) proponen la siguiente definición:

> Un problema para un individuo es una situación que requiere solución y, éste, estando motivado (u obligado por las circunstancias académicas, personales o vitales) no posee ni vislumbra el medio o camino que conduzca a la misma, al menos en lo inmediato.

Esta última perspectiva resalta que el concepto de problema es relativo al sujeto, dependiendo de los conocimientos previos y de las habilidades que tiene cada persona. Es decir, lo que para alguien puede resultar un problema para otro puede no serlo. Si la resolución es clara para el estudiante o se resuelve de manera algorítmica, no se trata de un problema sino de un ejercicio.

En la educación se pueden dar tres usos diferentes a la resolución de problemas, la primera como una metodología dentro de la enseñanza de la matemática, es decir, es una forma de aplicar los conceptos que ya fueron adquiridos. La segunda como una fuente para conseguir nuevas estrategias de resolución y pensamiento matemático. Y la tercera como método para adquirir un nuevo concepto (Díaz Lozada, 2018).

La investigación sobre resolución de problemas ha cambiado a través del tiempo. Las primeras investigaciones se basaban en métodos cuantitativos o métodos de pruebas de hipótesis estadísticas. Luego, George Polya (1989) realiza una extensa investigación sobre resolución de problemas desarrollando el concepto de heurísticas y la implementación de las mismas en la resolución de problemas.

Polya (1989) afirma que la resolución de problemas es una habilidad práctica que se desarrolla imitando a los docentes o directamente resolviendo problemas. Dentro de los entornos de aprendizajes se deben producir actividades con el objetivo de que los estudiantes interactúen con diferentes problemas no rutinarios para desarrollar las estrategias heurísticas y la habilidad de resolver problemas.

Alan Schoenfeld (1992), basándose en el trabajo de Polya, realiza una investigación sobre las herramientas heurísticas en estudiantes de primer año de la universidad afirmando que dichas herramientas pueden ser aprendidas. En este trabajo destaca cuatro dimensiones de la resolución de problemas: conocimiento, heurística, metacognición y creencias. Estas se entrelazan para desarrollar la habilidad para la resolución de problemas del estudiante.

Dada la centralidad que han tenido los matemáticos Polya y Schoenfeld en el desarrollo de la resolución de problemas en el marco de la comunidad de educación matemática, se dedicará una breve descripción de algunos aportes de estos autores a esta problemática.

2.2.1. Aportes de George Polya

¿Hasta dónde ayudar a los estudiantes a resolver los problemas? Es una pregunta difícil de responder ya que si le damos poca o nula ayuda puede que no progresen, si se les da mucha ayuda no aprenden nada. El docente debe darle una buena parte del trabajo a los estudiantes para que puedan encontrar la solución y en consecuencia puedan desarrollar la habilidad de resolver problemas similares. La habilidad de resolver problemas en el campo de trabajo en fundamental para un ingeniero y desarrollar esta habilidad en la universidad. Es importante incorporarle, paulatinamente, situaciones problemáticas en la mayor cantidad de ocasiones posibles.

La habilidad de resolver problemas es esencialmente práctica. El docente debe darle el mayor número posible de ocasiones para desarrollarla, generando situaciones interesantes que los motiven. El deseo por resolver el problema debe estar presente, así los estudiantes podrán buscar diferentes vías de solución y no simplemente hacer cálculos que no los lleven a nada.

Los estudiantes sin darse cuenta, en la resolución de problemas, están adquiriendo conocimientos matemáticos. Y si el docente genera situaciones donde razonen matemáticamente, usen la heurística y la metacognición estarán desarrollando el pensamiento matemático.

Polya (1989) delimita cuatro fases en la resolución de problemas. La primera, compresión del problema: entender claramente lo que se pide. Segundo, captar las relaciones que existen entre la incógnita y los datos. Tercero: la ejecución del plan trazado con el fin de resolverlo y cuarto: volver atrás una vez que se encuentra la solución para revisarla y discutirla.

Polya (1989) piensa que la heurística es imposible sin conocimientos. No se puede encontrar una vía de solución si los conocimientos sobre la materia son escasos. Las buenas ideas surgen de la experiencia y de los conocimientos adquiridos. Sin embargo, es una condición necesaria pero no suficiente contar con una buena base de ejercicios resueltos, teoremas demostrados y definiciones comprendidas. Es decir, poseer los conocimientos no garantiza resolver un problema, pero son necesarios para ello. Hoy en día se piensa que, si durante la resolución del problema el estudiante no posee los conocimientos necesarios, puede investigar e indagar sobre el tema, ya que existen muchas herramientas tecnológicas que lo permiten, para poder hallar una vía de solución.

Volver a examinar los resultados obtenidos y las distintas vías de resolución podrían consolidar los conocimientos. Los estudiantes harán interpretaciones concretas de los elementos abstractos de la matemática encontrando aplicaciones a dichos conocimientos, lo cual es estupendo para la formación de un ingeniero.

Polya (1989) afirma que el modo de abordar un problema depende del estado de los conocimientos que posean los estudiantes, para establecer relaciones entre la incógnita y los datos de problema. Afirma:

> Comprender el problema como todo, comprendiéndolo estaremos en mejor postura para juzgar qué puntos particulares pueden ser los más esenciales. Una vez examinados uno o dos puntos esenciales, estaremos en mejor situación para determinar los que merecen un examen más a fondo. (Polya, 1989, p. 73)

Ver el problema como un todo para luego descomponerlo en diferentes partes. Observarlas y luego reconstruirlo con una visión global puede ayudar a resolver un problema. Primero hay que comprender un problema como un todo, captando su objetivo, su idea directriz, para luego entrar en la resolución viendo diferentes vías de solución para decidir cuál es la más óptima y sencilla de resolver.

2.2.2. Aportes de Alan Schoenfeld

En la década de 1980 se creía que el foco de la educación matemática era la resolución de problemas, con el objetivo de que los estudiantes se conviertan en resolutores de problemas de forma competente. El estudiante debía ser capaz de pensar matemáticamente y resolver problemas complejos. Se pretendía que el estudiante desarrolle las destrezas necesarias para poder aplicar la matemática que había aprendido (Schoenfeld, 1992).

La resolución de problemas se puede dar como medio para desarrollar nuevas habilidades, para motivar sobre temas específicos o simplemente al servicio de los planes de estudios. En la educación universitaria actual, a veces, se proponen problemas a los estudiantes para mostrar la aplicación de la matemática en contextos fuera de la universidad. Pero muchas veces resultan un ejercicio o un problema con una vía de solución obvia para ellos. Por eso, es importante motivar a los estudiantes a ir más allá de lo que creen que son capaces. “El esfuerzo se debe centrar en: buscar soluciones (no solo memorizar procedimientos), explorar patrones (no solo memorizar fórmulas) y hacer conjeturas formales (no solo hacer ejercicios)” (Schoenfeld, 1992, p. 335). Si en la enseñanza se trabaja con estos desafíos es muy probable que los estudiantes vean a la matemática como una disciplina dinámica, que evoluciona, y de exploración, más que un cuerpo rígido, absoluto y cerrado con leyes para memorizar.

> Los estudiantes piensan que de las matemáticas ya se sabe todo y que, como si de la gramática latina se tratara, debe ser repetido hasta que se aprenda. No existe la emoción por descubrir algo nuevo, sino simplemente la (pequeña) satisfacción de adquirir ciertas habilidades. (Schoenfeld, 1995, p. 10)

Para que los estudiantes cambien su mirada de la matemática, se deben proponer actividades didácticas que sean desafiantes, motivadoras y que les permitan ser flexibles. La enseñanza de la matemática tiene que ser un espacio de descubrimiento. El estudiante debe ser capaz de utilizar la matemática en la vida profesional a partir de sus experiencias en la universidad. Por eso es necesario dotar al estudiante con herramientas para potenciar el pensamiento matemático y hacer uso de la matemática de manera significativa.

Schoenfeld (1995) piensa que la educación matemática depende de la conceptualización que tiene el docente de qué es la matemática y qué significa entenderlas. El docente tiene que hacer un trabajo metacognitivo de su propia concepción de la matemática y de su rol como docente. Debe ser consciente de su papel en el sistema educativo y que sus decisiones didácticas podrían eventualmente transformar la mirada del estudiante sobre la idea de qué es la matemática.

La consecuencia de una enseñanza matemática centrada en los contenidos y no en su aplicación, es que los estudiantes creen que el docente les proporcionará un método listo para solucionar ejercicios y problemas produciendo la repuesta en un período corto de tiempo. Esta forma de enseñar favorece la memorización y las habilidades mecánicas, y en consecuencia, que los estudiantes reduzcan sus esfuerzos de resolución luego de unos minutos sin éxito.

Asimismo, Schoenfeld (1992) considera que para pensar matemáticamente se debe desarrollar un punto de vista matemático. Expresa que la matemática ofrece distintos modos de pensamiento, siendo versátiles y potentes. Estos incluyen el modelado, la abstracción, la optimización, el análisis lógico, la inferencia de datos y el uso de símbolos. La matemática no es sólo un conjunto de habilidades sino es una forma de ver al mundo.

Esta manera de concebir a la matemática se ve reflejada en la resolución de problemas. En tal sentido, es necesario que el estudiante sepa los conocimientos y recursos que tiene potencialmente a disposición a la hora de resolver un problema. También es importante el sistema de creencia del estudiante sobre sí mismo y sobre la matemática, ya que, sus experiencias determinan la forma de utilizar o no los conocimientos durante la resolución de problemas. Schoenfeld (2012) afirma que, si un estudiante cree que todos los problemas se resuelven en cinco minutos o menos, este abandonará el problema pasado ese tiempo, aunque si perseveraba en su esfuerzo podría haberlo resuelto.

En la resolución de problemas se emplea el conocimiento, pero también se utiliza una amplia gama de estrategias. Estas estrategias dependen de la codificación que se ha hecho sobre experiencias pasadas. Las codificaciones modelan la forma en que el estudiante ve y se comporta frente a situaciones similares. De allí la necesidad de crear, dentro del ambiente universitario, diferentes situaciones que pongan en juego las habilidades y estrategias de los estudiantes.

Es por ello que para que los estudiantes desarrollen la capacidad de aplicar los conocimientos matemáticos en su vida profesional, es necesario que desde la enseñanza se les dé la oportunidad de explorar una amplia gama de problemas y situaciones. Estos los dotarán de diferentes enfoques y técnicas que luego, al naturalizarlas, podrán ser más fácil de implementar en su actividad laboral.

Schoenfeld (1995) considera que no es fácil el trabajo del docente cuando se persigue el objetivo de que los estudiantes desarrollen distintos tipos de habilidades flexibles. El profesor debe ser consiente de los distintos enfoques que pueden tener los estudiantes y debe tener en cuenta que la actividad planeada sea fructífera. El punto clave es la planificación de las actividades didácticas, en tal sentido, es importante planificar teniendo en claro el objetivo y sabiendo cuál es la población para la cual está destinada la actividad.

Dentro de la actividad didáctica de resolución de problema, el profesor debe saber cuándo y cómo intervenir, dando sugerencias que ayuden. Estas ayudas deben guiarse sabiendo que la responsabilidad de encontrar la solución está a cargo de los estudiantes.

Debe prestar atención a las dudas generando momentos de reflexión metacognitiva en los estudiantes.

Desde la mirada docente, es importante saber con qué herramientas matemáticas cuenta el estudiante a la hora de la resolución de problemas. Por ejemplo, si un estudiante no opta por cierta opción, ¿es porque la pasó por alto o porque no sabía de su existencia? Si la pasó por alto no hizo las conexiones correctas, por tanto, se trata de un problema metacognitivo. En cambio, si no sabía de su existencia es porque evidentemente le faltan herramientas y conocimientos. Por ello es importante saber distinguir si el estudiante posee los conocimientos para resolverlo y cómo los utiliza.

En una experiencia realizada por Schoenfeld con estudiantes universitarios, observó que el sesenta por ciento de los intentos de resolución de problemas fueron de la forma "lee, toma una decisión rápidamente y sigue esa dirección al infierno o al apogeo" (1992, p.356). Si la decisión rápida e incorrecta no es revisada y reconsiderada, llevará a los estudiantes a un fracaso y a desmotivarlos en la búsqueda de nuevas vías de solución.

Los estudiantes tienen creencias acerca de la matemática que delimitan el comportamiento frente a ella. Las estructuras de las creencias determinan la forma de actuar y de pensar tanto de los estudiantes como de los docentes. Schoenfeld (1992, p.359) enumera algunas creencias típicas de los estudiantes:

- Los problemas tienen una única vía de solución, generalmente la que el profesor mostró en clases.
- Los estudiantes ordinarios no esperan comprender la matemática, simplemente memorizar y aplicar mecánicamente los conceptos.
- La matemática es una actividad solitaria.
- Los estudiantes que comprendieron lo estudiado podrán resolver cualquier problema en cinco minutos.
- La matemática dada en la universidad está poco relacionada con el mundo real.
- La matemática tiene que ser fácil. Los estudiantes creen que la matemática debe ser lógica y sencilla.
- El estudiante que cree que los problemas tienen sólo una vía de solución desisten rápidamente al no encontrarla, esperando que la respuesta se la provea el profesor. En cambio, los que creen que hay varias vías de solución van a explorar las distintas aristas del problema.

El sistema de creencias se resume de las experiencias propias del estudiante y de la cultura donde está inmerso. Pero si esas experiencias se hacen en forma autorreguladas y conscientes es más probable que se tenga éxito en el desarrollo del pensamiento matemático. Los estudiantes deben ser inducidos y orientados a reflexionar sobre sus propios procesos de aprendizaje, es decir, generar momentos de reflexión metacognitivos. Para Schoenfeld los aspectos críticos del pensamiento matemático dependen de la metacognición, de los sistemas de creencias y de las prácticas educativas.

Si la resolución del problema se hace en pequeños grupos, la ventaja es que surgen diferentes ideas o maneras de encarar el problema. Allí deben decidir sobre las ventajas de cada una de ellas frente a las otras y justificar su elección. Este también es un proceso metacognitivo, ya que deben reflexionar sobre las diferentes opciones, tomar decisiones e incluso identificar fortalezas y debilidades durante la resolución del problema.

2.2.3. Aspectos a considerar en el diseño de problemas matemáticos

Came López et al. (2016) afirman que los problemas matemáticos dependen del contexto de aplicación y su estructuración. Los problemas matemáticos tienen ciertas características como: la aceptación, el conflicto cognitivo y la exploración.

- Aceptación: un problema matemático debe tener un atractivo para que el estudiante adquiera un compromiso y se sienta motivado en la resolución del mismo. Tiene que ver la necesidad de aprender a resolverlo, pero también percibir la utilidad que le dará en su vida profesional.
- Conflicto cognitivo: debe existir una primera instancia donde el estudiante no puede resolver el problema con los conocimientos o herramientas con las que cuenta hasta ese momento. Este obstáculo servirá de motivador de la búsqueda de nuevas formas de abordar el problema. Otros autores como Rodríguez (2019) lo definen como bloqueo inicial.
- Exploración: al no contar con los conocimientos o herramientas para superar el conflicto cognitivo, el estudiante debe explorar nuevos conocimientos, buscar diferentes estrategias y procedimientos para resolverlo. El estudiante no solo resuelve el problema, sino que en esta exploración se desarrollan nuevas estructuras mentales que generan que el estudiante se apropie del conocimiento y del manejo del algoritmo de resolución.

Con respecto a las posibilidades de resolución de un problema por parte de un individuo determinado, Garrett (1989, citado por García García, 1998, p. 157) desarrolla el concepto del umbral de problematicidad diferente para cada persona, como un límite personal que "cada individuo dependiendo su conocimiento personal, personalidad y de las estrategias o recursos de que disponga, verá una situación dada como un problema o simplemente como un puzzle o rompecabezas que debe armar".

Se entiende de este modo que el umbral de dificultad, que depende de cada individuo, es la dificultad máxima que puede tener un problema para que el estudiante con todos los recursos y heurísticas que posee pueda resolverlo. Pasado ese umbral el estudiante no podrá hallar la solución y se desmotivará decidiendo abandonar el problema.

A partir de esta caracterización, en el marco de esta tesis se propone el concepto de *zona de problematización* que está acotada inferiormente por el umbral de problematicidad y acotada superiormente por el umbral de dificultad. Algunas preguntas que surgen a partir de esta definición son las siguientes: ¿cómo medir esa zona de la problematización si depende de cada individuo?, ¿cómo plantear problemas que están dentro de esa zona para todos los estudiantes implicados en la actividad?

La delimitación de la zona de problematización es muy compleja, porque depende del sujeto al cual se le da el problema. A su vez, si se le quiere dar un problema a un grupo de estudiantes, este debe estar en la región común a todas las zonas de problematización de los involucrados. Es por eso que este nuevo concepto abrirá camino a la exploración e investigación para futuros proyectos de investigación.

Rodríguez (2015) destaca que un problema para un individuo tiene tres condimentos importantes: la motivación, las herramientas matemáticas y el desafío para quien lo resuelva. La ausencia de alguno de ellos podría llevar al estudiante a no resolver el problema. Es necesario crear problemas que sean atractivos y que se puedan resolver con los recursos que tiene el estudiante hasta ese momento. El hecho de que el problema tenga alguna dificultad genera la exploración de distintas vías de solución, enriqueciendo la experiencia.

Es evidente que a la hora de diseñar un problema este debe pensarse previamente, es decir, debe cumplir con ciertas características para que el estudiante desarrolle los conocimientos, las estrategias heurísticas y también la metacognición en la resolución del mismo.

Rodríguez (2015) afirma que el diseño de un problema debe atender a ciertos criterios como:

- Conocer qué saben/conocen los estudiantes. El docente debe conocer con qué conocimientos y herramientas cuentan los estudiantes. Debe saber valorar el grado de dificultad del problema. Si es difícil los estudiantes terminan desertando y si es fácil deja de ser un problema para convertirse en un ejercicio. Desde nuestra interpretación, esto supone que debe estar dentro de la zona de problematización de los estudiantes.
- La consigna debe estar redactada de una manera poco familiar. Si la consigna está redactada con un lenguaje o modo que el estudiante está familiarizado, este ya sabrá el camino a la resolución y no habrá tenido esa incertidumbre inicial.
- El problema debe admitir el uso de diferentes estrategias heurísticas. Debe ser lo más abierto posible para que los estudiantes exploren las diferentes heurísticas.

Si a la hora de la resolución los estudiantes no saben cómo seguir o qué hacer el docente debe ayudarlos con preguntas orientadoras. Estas preguntas deben orientar a la búsqueda de una o más vía de solución que antes no tenían en cuenta. El docente debe saber específicamente cómo ayudar porque de ayudarlos demasiado, el problema pasa a ser un ejercicio, quitándole la posibilidad de exploración.

Tal como lo señalaba Schoenfeld (2012), Rodriguez (2019) reconoce que poner en práctica esta línea didáctica de resolución de problemas no es fácil. Requiere que el docente sepa plantear problemas con las características antes mencionadas, logre guiar a los estudiantes para que experimenten diversas estrategias heurísticas en la resolución y que desarrollen la reflexión metacognitiva. Generar este tipo de actividades permitirá a los estudiantes ser buenos resolutores de problemas y ganar autonomía.

En relación con la intervención del docente, Díaz Lozada define impulsos a "las preguntas que formula el docente con la función de movilizar el pensamiento de los estudiantes, y que estimulan la actividad mental" (2018, p. 38). Esas preguntas orientadoras ayudan al estudiante a superar la incertidumbre inicial y fomenta el pensamiento. También ayudan a generar el hábito de cuestionar (a otros y a sí mismo), estimulan la discusión grupal, favorecen la búsqueda de diversas vías de solución y colaboran con la toma de posición frente a una vía de solución.

García García (1998) marca algunas líneas de investigación dentro de la resolución de problemas. La primera es tomar a la resolución de problemas como una estrategia para producir cambios conceptuales, metodológicos y actitudinales. Se van a generar cambios si los problemas están diseñados para tal fin, sino solo generarán conocimientos superficiales y resoluciones mecánicas. La segunda línea es la organización cognitiva del conocimiento, que es cómo se procesan, almacenan y estructuran en la memoria los conocimientos. La tercera supone el diseño de heurísticas y la cuarta aborda la creatividad en la resolución de problemas. Lo ideal sería generar actividades que integren estas cuatro líneas de trabajo y no tomarlas por separadas.

Por otro lado, si la resolución de un problema es una actividad grupal se debe garantizar que el ambiente de trabajo de los estudiantes sea un lugar donde las relaciones de poder entre compañeros sean horizontales, que se incentive a la participación de todos y fundamentalmente que sean equipo de trabajo y no grupos.

En relación con el diseño de un problema, resulta de interés tomar en cuenta algunas consideraciones que propone Rodriguez (2015) relacionadas con la valoración de las consignas que se proponen para que los estudiantes resuelvan. La matemática tiene la cualidad de potenciar el desarrollo intelectual de los estudiantes generando una formación integral y preparándolos para la vida profesional. Para estimular el desarrollo del pensamiento es necesario crear actividades que motiven a los estudiantes y ejecuten acciones de reflexión mientras se desarrollan los contenidos de la materia.

En las aulas se evidencia la deficiencia en el análisis y comprensión de los problemas, la centralización en la solución y no en el desarrollo, y la escasa exploración de las vías de solución del problema (Rodriguez et al., 2019). También se observa que en la parte práctica abundan ejercicios donde los estudiantes automatizan procedimientos, memorizan fórmulas o generan determinados algoritmos por la aplicación mecánica.

Es por eso que las consignas juegan un papel importante para el desarrollo del pensamiento matemático. Rodríguez define a las consignas como “enunciados de tareas matemáticas que un docente plantearía en un aula” (2017, p. 26). Propone un análisis a priori para valorarlas en función del potencial matemático, donde la posibilidad de exploración y de argumentación son aspectos fundamentales.

Rodríguez (2015) realiza una valoración cualitativa del potencial matemático de una consigna como: pobre cuando la consigna no permite la exploración de diferentes caminos de resolución ni tampoco da lugar a la argumentación. En cambio, el potencial matemático es rico cuando da la oportunidad de exploración y búsqueda de diferentes caminos y recursos para la resolución donde la argumentación tiene una fuerte presencia.

Esta autora, además, destaca la importancia que tiene para el aprendizaje de la matemática la introducción de consignas con el fin de desarrollar aspectos metacognitivos (Rodríguez, 2017). Se espera que estas consignas propicien de parte del estudiante la toma de consciencia de su desempeño en las diferentes situaciones, analizando sus propias fortalezas y limitaciones cognitivas y observando las diferentes estrategias y procedimientos matemáticos puestos en juego en la resolución. El aprendizaje, sostiene la autora, se ve fortalecido cuando el estudiante realiza una reflexión y autoevaluación sobre su desempeño en la resolución de consignas matemáticas.

Las consignas donde el estudiante reflexiona sobre su propio hacer cognitivo implicado en la resolución de ejercicios o problemas se denominan consignas metacognitivas. Rodríguez (2017) las diferencia en dos tipos: las consignas referidas a lo metacognitivo personal y las consignas vinculadas a lo metacognitivo matemático. La primera se enfoca en constituir un conocimiento metacognitivo concerniente a las características individuales con relación al aprendizaje, y la segunda hace hincapié en el conocimiento metacognitivo referido a las estrategias y al reconocimiento del aprendizaje adquirido o no.

Rodriguez (2017) afirma que si el estudiante dispone de los conocimientos metacognitivos tendrá mayor control sobre su desempeño en el aprendizaje de la matemática. Esto le permitirá a nivel matemático dominar su desempeño en la resolución de problema viendo cuál es la estrategia más adecuada a cada situación, advirtiendo sus limitaciones y posibilidades. Y a nivel personal podrá identificar dificultades, cómo se percibe como resolutor de problemas y qué piensa que aprendió.

Garófalo y Lester (1985, mencionado por Rodriguez, 2017, p. 35) afirman que “las creencias, decisiones y acciones metacognitivas son determinantes en el éxito o el fracaso en una gran variedad de situaciones”. El sistema de creencias, la variable afectiva, la autoevaluación de las propias fortalezas y debilidades y las estrategias de aprendizajes disponible son determinantes a la hora de enfrentarse el estudiante a la resolución de un problema.

A la hora de la planificación es “de central importancia que las consignas metacognitivas tengan la intencionalidad explícita de involucrar al estudiante en prácticas de reflexión” (Rodríguez, 2017, p. 38).

Rodríguez establece criterios que se deben tener en cuenta a la hora de la redacción de las consignas. Como:

- No pedir explícitamente que los estudiantes realicen gráficos, resuelvan ecuaciones o hallen fórmulas. Redactar la consigna de manera que lo pedido sea un requerimiento necesario para la resolución de la consigna.
- Que demande una argumentación o justificación donde el estudiante exponga de manera coloquial el porqué de sus afirmaciones.
- Si el enunciado se encuentra en un contexto real, evitar preguntar sobre objetos matemáticos, sino que dirigir las preguntas hacia el relato y su contexto.

Durante la resolución de problemas se espera que los estudiantes tengan un sentido matemático para que puedan comprender mejor el enunciado y aproximarse a la solución. De la elección y configuración del problema dependerá si los estudiantes pueden solucionarlo de una manera flexible e ingeniosa, o simplemente lo resolverán de forma mecánica. Es muy importante el diseño adecuado de las actividades para potenciar el pensamiento matemático.

Cuando se resuelve un problema se están movilizando acciones mentales, recursos intelectuales y operaciones del pensamiento. Esta búsqueda de relación entre el problema y los conocimientos matemáticos disponibles ayudan al desarrollo del pensamiento matemático. La búsqueda de las diferentes heurísticas y la toma de conciencia de la metacognición por parte de los estudiantes, estimula al desarrollo del pensamiento matemático. Ese proceso de búsqueda y ejecución de acciones estratégicas fomentan la actividad mental trayendo como consecuencia la adaptación a los cambios del contexto de manera flexible.

El término flexibilidad se refiere a la capacidad de cambiar de enfoque a un problema, es decir, ver al problema desde diferentes puntos de vista. Esta capacidad requiere abandonar viejos modos de pensar y buscar diferentes direcciones, explorar diferentes vías de solución hasta llegar a la más adecuada y factible.

Jiménez (2007, citado por Díaz Lozada, 2018, p. 36) sostiene que: "En la medida en que se estimula la reflexión propia, la crítica y la comunicación activa, se propicia que el estudiante adquiera conciencia de sus ideas y sea capaz de expresarlas en formas lógica". El estudiante no va a hacer solo el trabajo de la reflexión y de la autocrítica, se deben generar actividades que lo estimulen a ello.

Los recursos heurísticos se pueden dar de forma explícita o implícita. Lo importante es que el estudiante se dé cuenta de ellos y sobre todo del uso que le puede dar. Entre estos recursos se encuentra los medios auxiliares heurísticos, que son elementos que funcionan como soporte material facilitando la aplicación de las estrategias heurísticas. Por ejemplo, el uso de gráficos o tablas (Müller, 1992, citado en Díaz Lozada, 2018, p. 37).

2.3. Registros de representación

Para estimular el pensamiento matemático en los estudiantes se deben generar actividades dirigidas a tal fin, que contribuyan a la mejora de sus capacidades de razonamiento, análisis, justificación y argumentación. Duval afirma que "el desarrollo de las representaciones semióticas es una condición esencial para el desarrollo del pensamiento matemático" (2016, p. 63).

Este autor afirma que "una representación es algo que se pone en lugar de otro algo" (2016, p. 62). El rol de las representaciones depende de la situación y su uso determina la posibilidad del pensamiento matemático.

Los conceptos matemáticos no son objetos reales, es por eso que se requiere de diferentes representaciones para su estudio y comprensión. Es decir, las representaciones semióticas juegan un rol fundamental en la matemática, ya que constituyen el único medio de acceso a los objetos matemáticos.

Riveros (2019, p.17) afirma que:

> Las representaciones juegan un papel importante en los procesos de aprendizaje de la matemática, ya que el estudiante puede expresar y exteriorizar una idea de su conocimiento. Es indispensable que las concepciones de los estudiantes tengan diferentes representaciones y que exista una relación entre ellas. Duval y Sáenz (2016) expresan que el uso de varias representaciones semióticas de un objeto matemático facilita la comprensión del concepto, dándole importancia a las

construcciones mentales, a los procesos cognitivos en la formación de conocimiento y al mismo tiempo aumentando la capacidad del pensamiento matemático y por lo tanto el conocimiento del objeto.

Los registros semióticos son los conjuntos de signos que sirven para representar una idea u objeto matemático. Tienen tres características: ser identificables, permiten el tratamiento y admiten conversiones (Duval, 2016).

El tratamiento de un registro semiótico son las transformaciones de representaciones que ocurren dentro de un mismo registro (Duval, 2016). Por ejemplo, hacer cálculos manteniendo la misma notación o resolver una ecuación.

La conversión es una transformación desde un registro de representación a otro registro sin cambiar el objeto denotado (Duval, 2016). Por ejemplo, pasar de una ecuación en notación algebraica a su representación gráfica. La conversión es compleja, ya que al cambiar de registro de representación se debe reconocer al mismo objeto representado, aunque parezcan distintos.

La asociación de un enunciado con una representación visual trae como beneficio la economía de la memoria pues tiene en cuenta todos los elementos que se relacionan. Pero también favorece a la heurística, ya que el tratamiento visual de los problemas matemáticos ayuda a observarlos desde un enfoque distinto. Esto abre la posibilidad de encontrar casos límite o diferentes vías de solución.

Duval manifiesta que "las representaciones semióticas se deben tomar en consideración en el análisis del pensamiento matemático" (2006, p. 158).

A menudo se utilizan varias representaciones al mismo tiempo, por ejemplo, un problema matemático expresado en lenguaje coloquial se lo puede expresar en un lenguaje simbólico y también mediante una representación visual. El uso de un software puede dotar de una percepción dinámica de la transformación representada en vez de un soporte estático como es el papel.

Se piensa que los problemas aplicados a la vida real producen procedimientos y operaciones que dan significado al aprendizaje de la matemática. Pero existe otra razón para resolver problemas reales, es que los estudiantes utilizan estas experiencias diarias para comprender conceptos matemáticos dándole sentido a las representaciones semióticas empleadas. "La ventaja educativa de los problemas de la vida real es que permiten trabajar libremente con aquellas representaciones que parezcan más accesibles que las que usan en matemática" (Duval, 2006, p. 164).

Dentro de la transición de la situación real a la representación mental el estudiante hace una reconstrucción mental del problema para entender qué es lo que se le pide y qué información puede sacar del texto o fotografía.

Las representaciones mentales son propias de cada individuo, éstas dependen del estilo del pensamiento matemático, de las imágenes visuales asociadas a la experiencia propia y de las simplificaciones inconscientes que realiza en ese momento. Es decir, que frente a una misma imagen un estudiante puede tener una interpretación diferente a la de su compañero. Por esa razón, resulta de interés promover el trabajo grupal, para generar la necesidad de exponer y defender los argumentos de cada integrante, para validar las interpretaciones individuales y consensuar una producción en común.

Con respecto a la interpretación de las imágenes, resulta de interés retomar algunas nociones vinculadas con la interpretación de las imágenes visuales. Gutiérrez habla de la interpretación de información figurativa como "el proceso de comprensión e interpretación de representaciones visuales para extraer la información que contiene" (1992, p 45). Borromeo Ferri (2006) y Gutierrez (1992) coinciden que el procesamiento de la imagen depende el estudiante.

También Gutiérrez (1992) clasifica a las habilidades que podrían integrar la percepción espacial del estudiante, entre ellas se encuentran:

- Reconocimiento de la posición en el espacio, cuando relaciona al objeto con respecto a un punto de referencia.
- Reconocimiento de las relaciones espaciales, reconocer las características del objeto, por ejemplo, la simetría o si el objeto está girado o desplazado.
- Discriminación visual, permite comparar varios objetos observando sus similitudes y diferencias visuales.

Para facilitar la representación visual se pueden utilizar los sistemas de geometría dinámicos que brindan diferentes posibilidades para trabajar en la resolución de problema ya que permiten representar conceptos de forma dinámica. Lo que da la posibilidad de mover los objetos de forma ordenada para poder observar algún atributo o identificar patrones. Estos sistemas son útiles tanto en la organización y representación de la información que brinda el problema como en el proceso de validación dentro de la metacognición. El uso de las herramientas tecnológicas abre nuevos caminos de exploración transformando la naturaleza rígida y estática que tradicionalmente se utiliza en las universidades (Hanna, 2020).

Capítulo 3: Acción y Reflexión

3.1. Justificación de la secuencia de problemas

Esta tesis propone una secuencia de problemas para promover el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de las carreras de ingeniería. Se espera que la investigación impulse el interés reflexivo no solo en los estudiantes sino también en los docentes encargados de la formación de ingenieros.

El cambio constante en la ciencia y la tecnología plantean nuevos desafíos a la educación, lo que provoca un cambio en las estrategias didácticas para la formación de futuros ingenieros. Tradicionalmente prevalecía la transferencia de los conocimientos en forma lineal-secuencial provocando acumulación del conocimiento frágil o pensamiento pobre, en término de Perkins (1995). Este autor afirma (1995, p. 21) que "necesitamos escuelas que en lugar de girar en torno del conocimiento lo hagan en torno del pensamiento". Sostiene que es esencial el compromiso reflexivo del estudiante con la enseñanza para obtener una mejor calidad en el aprendizaje.

Para promover el pensamiento matemático el esfuerzo debe ser mutuo entre docentes y estudiantes. El docente debe generar actividades específicas para el desarrollo del pensamiento matemático y el estudiante debe tener el compromiso y la motivación para realizar las actividades propuestas.

Durante la formación universitaria el estudiante debe desarrollar un pensamiento crítico y reflexivo. También debe adquirir habilidades y destrezas que luego utilizará para dar respuestas a problemas o situaciones que demanden el uso activo del conocimiento. Díaz Lozada (2018, p. 7) sostiene que "la resolución de problemas es una de las situaciones de aprendizaje más propicias para lograr el desarrollo intelectual del estudiante, por eso es preciso aprovecharla para estimular el desarrollo de su pensamiento".

La intención de esta tesis no es sólo la promoción en los estudiantes del pensamiento matemático, sino acercarlos a una forma de actuación que puedan replicar en su futura vida profesional. De nada sirve tener pensamientos superiores en la universidad, en la etapa de formación, si luego no se logran aplicar en la vida profesional.

La experiencia se realizó en pequeños grupos con el propósito de que el trabajo colaborativo cree un clima que genere ideas creativas para la resolución de los problemas.

La discusión entre compañeros y la diversidad de puntos de vista fomentan la heurística permitiendo al grupo tener un mejor desempeño y autonomía ante las diversas situaciones.

Siguiendo con la teoría de Vigotsky (2007) de la zona del desarrollo próximo, el ambiente de trabajo conjunto propicia el desarrollo del pensamiento hacia un nivel superior del que hubiese alcanzado si el estudiante lo resuelve individualmente. La colaboración o guía de un compañero más capaz dará mejores resultados que si lo resuelve en forma aislada. El trabajo en equipo puede ayudar a los estudiantes a alcanzar sus objetivos en mejores condiciones respecto del trabajo en soledad.

Se asume que es labor del docente alentar la participación individual dentro de cada grupo para potenciar el pensamiento individual de cada integrante. Asimismo, debe promover el intercambio de ideas para que conjuntamente encuentren nexos entre el problema y la teoría o exploren diversas vías de solución.

La planificación de la actividad debe hacerse con tiempo y centrada en el objetivo. Las consignas deben ser claras y que no se limiten a un solo camino o respuesta posible (Rodríguez, 2017). En la resolución de problemas la exploración de diferentes vías de solución hará que los estudiantes desarrollen el pensamiento divergente, la originalidad y la flexibilidad.

Si la situación problemática propuesta a los estudiantes está bien planteada podría propiciar al desarrollo del pensamiento matemático. Por el contrario, si el problema propuesto no lleva a la discusión grupal o a la exploración de diferentes vías de solución difícilmente se desarrolle este pensamiento. Las actividades que se resuelven de forma algorítmica o mecánica no estimulan el desarrollo del pensamiento matemático. El supuesto del que se parte en esta investigación es que tanto el trabajo del docente (durante la planificación y gestión de la actividad) como la voluntad del estudiante son fundamentales para alcanzar los objetivos deseados.

Díaz Lozada afirma que “el docente puede utilizar la resolución de problemas como recurso para estimular al estudiante a realizar actividades que impliquen esfuerzo mental, alentando a movilizar sus recursos intelectuales” (2018, p. 21).

Lo que pretende esta experiencia es incentivar en los estudiantes la forma de pensar matemática, adquiriendo actividades mentales conscientes hacia el desarrollo de la misma, que les permitan llevar adelante un proceso de búsqueda, formular hipótesis, argumentar e implementar un razonamiento lógico-matemático.

La propuesta de búsqueda de una solución a los problemas propuestos en esta tesis se divide en dos etapas. En la primera el estudiante debe pensar, explorar, preguntar, investigar y utilizar las diversas estrategias heurísticas de manera individual para tratar de aproximarse a la solución del problema. En la segunda, se realiza una puesta en común con sus compañeros de grupo para decidir qué heurísticas usar y los medios de validación de los resultados obtenidos. La reflexión colectiva es muy importante porque estimula la crítica, el aprendizaje cooperativo, incentiva el intercambio de ideas y afianza las relaciones interpersonales.

Se observa que desde hace muchos años los estudiantes de la asignatura AMII tienen un aprendizaje memorístico. Según la clasificación del aprendizaje que realiza Osses Bustingorry y Jaramillo Mora (2008), este tipo de aprendizaje es un aprendizaje mecánico o repetitivo donde el estudiante aprende un algoritmo para resolver un ejercicio o aplicarlo en cierta ocasión teniendo escasa asimilación del contenido. Esto se observa en los exámenes de la cátedra donde, por ejemplo, se pide calcular el rango de variación de la derivada direccional en un punto de una función de dos variables diferenciable y el estudiante lo resuelve sin dificultad. Pero cuando se plantean situaciones en las que debe decidir sobre la verdad o falsedad de una afirmación como "la derivada direccional de una función de dos variables diferenciable en un punto está acotada" no logran responder porque, posiblemente, está expresada de un modo diferente al que están acostumbrados. Además, se observa que tienen muchas dificultades para responder interrogantes de verdadero o falso. En este sentido, es posible que exista un conocimiento deficiente de las reglas del debate matemático (Arsac et al.,1992), dado que tienen dificultades para reconocer la necesidad de hallar contraejemplos en caso de que la afirmación sea falsa o desarrollar una prueba en caso de ser verdadera.

En los exámenes se evidencia que los estudiantes tienen un aprendizaje memorístico. Se pone de manifiesto cuando los estudiantes estudian cómo resolver los ejercicios, practican con exámenes que ya fueron tomados y las demostraciones se las estudian de memoria. Dewey lo expresa:

> Un estudiante tiene un problema; pero es el problema de satisfacer las exigencias peculiares puestas por el maestro. Su problema llega a ser el de descubrir lo que el maestro quiere, lo que satisfaga al maestro en la repetición y el examen. [...] En el caso peor, el problema del estudiante no es cómo satisfacer los requisitos de la vida

escolar, sino cómo aparentar que los satisface, cómo acercarse a ellos lo suficiente para satisfacerlos sin una cantidad innecesaria de fricción. (Dewey, 1998, p. 138).

La secuencia de problemas estimula el aprendizaje significativo, contribuye a la autonomía del estudiante y a la independencia cognitiva para que pueda seguir aprendiendo por si solos (García García, 1998). Con el fin de formar ingenieros que resuelvan problemas y demanda de la sociedad de manera creativa, holística y sostenible.

3.2. Caracterización de las consignas

Se parte del supuesto de que las consignas juegan un papel fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes. En la secuencia de problemas se plantean consignas que, en general, poseen rico potencial matemático ya que posibilitan la exploración de distintas vías de solución y exigen una fundamentación de las decisiones tomadas por parte de los estudiantes (Rodríguez, 2017).

Las consignas de los coloquios entregadas a los estudiantes se encuentran en el Anexo N°2. Las mismas son diferentes entre los distintos grupos, pero con el mismo nivel de complejidad. En el Anexo N° 3 se incluye una resolución experta de cada problema. Para la resolución de cada coloquio los estudiantes disponen de una semana para entregar la resolución escrita. El día posterior a la entrega se realiza la exposición oral durante la cual los grupos exponen sus resoluciones. La docente realiza su devolución y plantea consideraciones sobre el trabajo expuesto.

Todos los coloquios están enmarcados en un contexto real, por ejemplo: “Se desea reforzar la estructura del silo que se muestra en la figura, colocando un alambre que se va a arrollar alrededor de la superficie cilíndrica”. Se evita preguntas sobre objetos matemáticos, sino que se dirige a preguntas hacia el relato y su contexto.

Como se ha mencionado anteriormente, un análisis previo de las consignas entregadas a cada grupo permite observar que, en general, tienen un rico potencial matemático. Por ejemplo, en el coloquio 2 se pide: “Se quiere reforzar el tronco del cono inferior del silo con aros circulares de alambre reforzado. Realizar un diseño posible de cómo se puede realizar este refuerzo, justificar el diseño y calcular cuánto alambre se emplearía en su construcción”. Al solicitar a los estudiantes que diseñen el refuerzo del silo sin darles información acerca de cuántos aros o en qué ubicación deben colocarse, se favorece la exploración de diferentes vías de solución y la reflexión sobre cuál será la mejor forma para colocar los aros. No hay una única respuesta correcta ya que la fundamentación de la ubicación y la cantidad de aros es esencial.

Esta fuerte presencia de la solicitud de justificación demanda de los estudiantes el uso de conocimientos matemáticos, pero también de conocimientos de otras asignaturas, convirtiéndose en una consigna transdisciplinaria. Para la justificación de la elección del diseño con aros para reforzar el cono inferior del silo, los estudiantes de ingeniería mecánica e ingeniería civil usaron los conocimientos de la asignatura Estabilidad. Para evitar la deformación del silo por los aros utilizaron los conocimientos de la asignatura Ciencia de los materiales.

Parte de la consigna del coloquio 1 solicita: "La empresa quiere pintar el silo de acuerdo a los colores que identifican la marca. Se pintará de verde debajo de la curva de intersección entre la parte cilíndrica del silo y un cilindro parabólico, cuya generatriz es perpendicular al cilindro circular recto. El punto más alto de la curva está a 3/4 de la altura total del cilindro y el punto más bajo a 1/3 de dicha altura." Si bien se les dan ciertas características de cómo deben pintar el silo, no se pide explícitamente que grafiquen la situación ni que resuelvan ecuaciones o hallen fórmulas. Es claro que, para encontrar la fórmula de la superficie del cilindro parabólico necesitan conocimientos matemáticos, pero éstos no se explicitan, como sería el caso de: "hallar la superficie del cilindro parabólico que satisface …".

Las consignas de los cuatro coloquios cumplen con los criterios descriptos por Rodríguez (2017) respecto de su redacción. Es decir, están en un contexto real, se evitan preguntas sobre objetos matemáticos, tienen diferentes vías de solución y no tienen una única respuesta. Demandan una argumentación o justificación por parte de los estudiantes tanto coloquial como matemática. Como por ejemplo en el coloquio 3 se plantea: "Se desea colocar una mezcladora como la de la figura dentro del silo. El volumen de la mezcladora debe ser 1/6 del volumen total del silo. ¿Qué dimensiones debe tener? Se la quiere colocar en el interior del silo colgada con cables de acero de manera de que permanezca estable. Decidir y justificar la ubicación de la mezcladora y de qué forma estará suspendida para su óptimo funcionamiento."

En la consigna del coloquio 1 se utiliza una fotografía como medio para acceder a la información del problema. En este caso, los estudiantes están usando la interpretación de información figurativa (Gutiérrez, 1992), de donde pueden deducir las medidas, la posición del silo relativa al suelo, entre otras cuestiones de interés para su resolución.

Además, el uso de la fotografía hace que los estudiantes vean al problema como un problema real y no como una situación irreal o abstracta. El visualizar el problema como real hace que esa brecha entre la matemática y lo real sea más pequeña, asumiendo el rol de la matemática como una herramienta que permite resolver situaciones de la vida real, y adquieren una visión de la disciplina menos abstracta respecto de cómo ha sido presentada históricamente (Dewey,1998).

Junto a la fotografía se les entrega una escala que los estudiantes deben utilizar para estimar las medidas del silo. Es necesario resaltar que, como futuros ingenieros, deben saber realizar mediciones y tomar decisiones de acuerdo a la precisión del instrumento de medición.

Por otra parte, los problemas están enunciados en un lenguaje natural, generando una incertidumbre inicial ya que los estudiantes no están acostumbrados a problemas sin números o sin ecuación a resolver. Esto causa un grado de desconcierto que los pone en alerta y buscan las diversas estrategias heurísticas para aproximarse a una solución. Al no tener una dirección específica el estudiante debe tomar las decisiones del camino a seguir y la ejecución del proceso de validación de la misma. Por ejemplo, cuando en la consigna del coloquio 2 se les pide a los estudiantes: “Ahora se quiere reforzar el tronco del cono inferior del silo con aros circulares de alambre reforzado. Realizar un diseño posible de cómo se puede realizar este refuerzo, justificar el diseño y calcular cuánto alambre se emplearía en su construcción.”.

Todas las consignas cumplen con las características que deben satisfacer los problemas matemáticos según Came López (2016), a saber: aceptación, los problemas tienen un atractivo que motiva al estudiante a resolverlo, al estar en un contexto real ven la utilidad en su futura vida profesional. También se considera que está dentro de la zona de problematización ya que no son ejercicios con resolución mecánica ni se considera *a priori* que son imposibles de resolver.

3.3. Descripción del análisis

Para realizar un análisis de las presentaciones tanto escrita como oral de los estudiantes y contemplar todas las dimensiones descriptas en el marco teórico se confeccionó una tabla con las dimensiones del pensamiento matemático, junto con sus indicadores y descriptores correspondientes.

Esta tabla es una adaptación de la propuesta por Marino y Rodríguez (2009), que elaboran una tabla con la organización de las heurísticas junto con sus descriptores generales. Esta nueva tabla (Tabla 2) permite considerar las tres dimensiones del pensamiento matemático propuestas en el marco teórico de esta tesis.

Tabla 2

Parte 1. Dimensión del pensamiento matemático: Razonamiento Lógico-Deductivo

Indicadores	Descriptores generales	Descripción
Aplicar conceptos y proposiciones	Recurrir a teoría relacionada	Recordar y utilizar teoría relacionada con el problema.
Organizar y representar la información que brinda el problema	Realizar una gráfica	Realizar una gráfica que ayude a entender mejor el problema.
	Reinterpretar el problema en un lenguaje diferente	Traducir el problema en un lenguaje diferente al dado que facilite el abordaje. (*)
Deducir consecuencias de los datos del problema	Realizar cadenas de razonamientos lógicos	Estructurar y enunciar procedimientos lógicos y aplicarlos en un lenguaje preciso.
Argumentar y demostrar proposiciones	Realizar un proceso de validación	Dar una prueba o demostración de las proposiciones. Verificar hipótesis de los teoremas utilizados.

(*) Nota: Supone cambiar de representación semiótica. Duval (2016) lo denomina conversión de registros de representación.

Parte 2. Dimensión del pensamiento matemático: Heurísticas

Indicadores	Descriptores generales	Descripción
Identificar nexos y relaciones	Relacionar proceso de solución con el problema	Establecer en el proceso de resolución nexos y relaciones con el problema.
	Razonar por analogía	Recordar problemas resueltos anteriormente, cuya resolución sea similar al nuevo problema.
Variar las condiciones iniciales del problema	Simplificar el problema	Simplificar para obtener un problema semejante pero más sencillo, cuyo abordaje ayude a resolver el problema original.
	Dividir el problema en subproblemas	Descomponer en subproblemas, analizarlos independientemente y luego, recombinar las soluciones parciales para formular una solución general.
	Introducir un elemento Auxiliar	Presentar algún elemento que no fue dado en el enunciado del problema.
Identificar casos particulares	Análisis sistemático de casos	Asignar valores a los parámetros del problema, para extraer pautas y realizar una generalización que permita avanzar en la resolución.
	Analizar casos límites o especiales	Considerar valores extremos para explorar la gama de posibilidades.
	Analizar ejemplos	Considerar valores cualesquiera que sirvan para ejemplificar y explorar el problema.
Explorar diferentes vías de solución	Buscar diferentes vías de solución	Buscar otra vía de solución diferente a la propuesta anteriormente.

Parte 3. Dimensión del pensamiento matemático: Metacognición

Indicadores	Descriptores generales	Descripción
Organización del conocimiento	Organizar el conocimiento	Organizar los conocimientos y conceptos que serán útiles para la resolución del problema.
Verificación de la solución obtenida	Verificar utilizando distintos registros de representación	Verificar la respuesta usando un registro de representación distinto de aquel en el que se produjo dicha respuesta. (Graficar)
	Verificar utilizando casos particulares	Verificar la respuesta utilizando en casos particulares.
	Verificar si la respuesta es viable	Verificar la coherencia de la respuesta obtenida con el problema.
Controlar la ejecución de la vía de solución	Tomar conciencia de los pasos realizados	Realizar una explicación de los pasos realizados o una narrativa en el proceso de resolución.
Reflexionar acerca de la vía de solución	Reflexionar acerca de la vía de solución.	Ajustar, modificar o reforzar la vía de solución.
Identificar alternativas de vías de solución	Identificar varias vías de solución.	Barajar diferentes vías de solución para finalmente quedarse con la más adecuada.
Identificar fortalezas y debilidades	Identificar fortalezas y debilidades	Identificar fortalezas y debilidades durante la resolución del problema.

3.4. Análisis de las respuestas

En este apartado se analiza la información escrita y oral obtenida a partir de las resoluciones grupales de los coloquios. Como ya se ha indicado, las consignas de los cuatro coloquios se incluyen en el Anexo N° 2. El análisis de respuestas para cada coloquio se organiza en torno a los siguientes sub-apartados:

- Análisis de las producciones del Grupo 1

- Análisis de las producciones del Grupo 2

- Conclusiones generales del coloquio: incluye una descripción general de las producciones de los ocho grupos.

La notación adoptada para hacer referencia a cada grupo se compone con la letra mayúscula G seguida del número de grupo. Por ejemplo, G1 refiere al Grupo 1. Para identificar a cada estudiante en particular, se adopta la notación Sn,m, donde n denota el número de sujeto y m el número de grupo al que pertenece el sujeto. Finalmente, las frases textuales de los sujetos y o de las producciones grupales se colocan en cursiva.

3.4.1 Análisis de las producciones orales y escritas del coloquio 1

Análisis de las producciones del Grupo 1

La resolución escrita del Grupo 1 está disponible en el siguiente enlace, que se incluye también en el Anexo N° 4: https://drive.google.com/file/d/13dGmZ2rG4LkFC5RaixBQa2q4MXrpdJDX/view?usp=sharing. A continuación, se describe brevemente la producción a partir de las dimensiones consideradas en el pensamiento matemático.

Razonamiento lógico-deductivo

- Realizan un análisis de la fotografía, utilizan la escala para estimar las medias del silo y representan un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales para ubicar el origen de coordenadas.

Figura 1

Tratamiento de la fotografía para estimar medidas y ubicación del origen de coordenadas

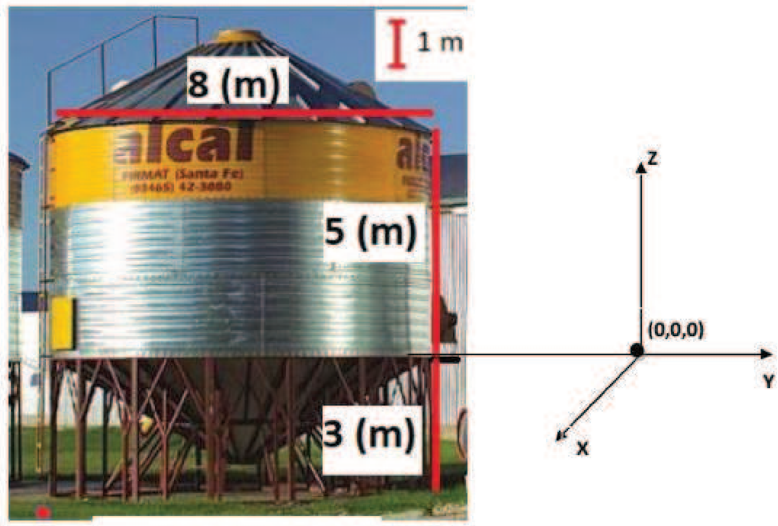


Figura N°1: medidas en metros.

- Realizan el gráfico de un cilindro interceptado por dos planos perpendiculares a la generatriz, para comprender mejor el problema e interpretarlo gráficamente. Hacen una conversión (Duval, 2016) entre la notación simbólica matemática y las representaciones visuales del silo. También realizan un gráfico del silo, la hélice, el suelo y el punto de anclaje para comprender mejor el problema. Ubican espacialmente el punto de anclaje.
- Recurren a la teoría relacionada cuando apelan a la ecuación de una hélice para relacionarla con la forma del alambre. También cuando recurren a la fórmula de la longitud de arco para calcular la cantidad de alambre que se necesita para la construcción del refuerzo.
- Reinterpretan el problema, traduciendo el problema del lenguaje natural a un lenguaje simbólico (es decir, realizan una conversión en el sentido de Duval, 2016).
- Realizan una cadena de razonamientos lógicos. Ejecutan correctamente todos los pasos para hallar una recta tangente genérica a la curva en un punto P_0. Justifican analíticamente la no existencia del punto pedido.
- Utilizan la ecuación general de un cilindro parabólico para hallar el pedido.
- Parametrizan la curva intersección utilizando teoría de funciones vectoriales. Realizan una buena conversión entre la notación simbólica matemática y las representaciones visuales del silo.

- Gráficamente ubican los puntos máximos y mínimos de la curva intersección.
- Utilizan la fórmula del cálculo de la integral de línea para funciones escalares. No interpretan bien la función de varias variables ni la curva que deben utilizar para hallar el área debajo de la curva.

Heurística

- Establecen una relación entre el problema y los pasos realizados, por ejemplo, afirman: "*solo queda calcular una longitud de arco definida que dará como resultado la cantidad de metros de alambre necesarios* ". (Producción escrita G1, p.5)
- Para resolver el problema del suncho, proponen un punto genérico que pertenece a la curva. Definen un vector que une ese punto genérico con el suncho. Afirman que el vector debe ser proporcional o igual al vector de la recta tangente. Plantean un sistema de ecuaciones (al que le falta la constante de proporcionalidad) y llegan a la conclusión de que no existe dicho punto.
- Ajustan la ecuación general de un cilindro parabólico a sus puntos máximos y mínimos.

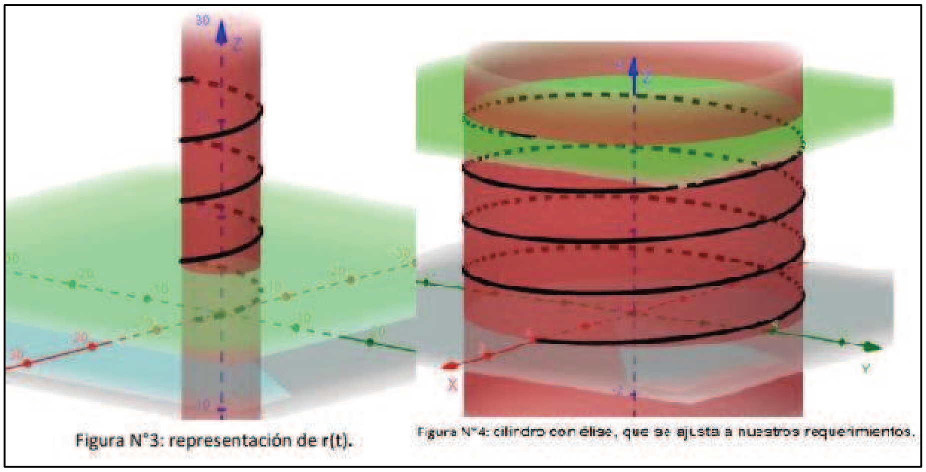
Metacognición

- Identifican que los datos son estimados y no exactos. Justifican que estiman las medidas del silo utilizando la escala proporcionada junto con la fotografía. Afirman: *"Todas nuestras medidas son estimadas, dado que no tenemos los datos de los mismos, solamente tenemos la referencia que vale 1 metro, como se ve representado en la figura".* (Producción escrita G1, p.2)
- Toman conciencia de que el alambre no satisface la consigna de la cantidad de vueltas o la altura que debe dar. Afirman: *"tuvimos un inconveniente que, en la componente "Z" tuvimos que multiplicar por una constante para que, al evaluar en la función r(t) lleguemos a la misma altura del cilindro, cuando lleguemos al extremo del intervalo 8π"* (Producción escrita de G1, p.3). Grafican para verificar que la curva hallada no es correcta. En la exposición oral justifican con proporcionalidad directa cómo obtuvieron la constante que multiplica a la última componente de la función vectorial que representa a la hélice.

- Verifican la solución usando un registro de representación diferente al que venían utilizando. Realizan una gráfica para verificar que la hélice cumpla con la consigna.

Figura 2

Gráfico de G1 del cilindro y la hélice donde realizan un proceso de validación



- Controlan la ejecución de la vía de solución dando una explicación de los pasos a realizar, por ejemplo, afirman; *"Para verificar si se puede colocar un tensor, primero debemos verificar si alguna de las rectas tangentes pasa por el punto donde se quiere colocar el anclaje"* (Producción escrita G1, p.6).
- Identifican debilidades durante la resolución del problema. En la exposición oral declaran que en el tema del tensor tuvieron varios inconvenientes *"se nos complicó verlo"*.
- Tienen claro el problema y qué es lo que se les pide:
  Para calcular los litros de pintura necesarios, debemos calcular el área bajo la curva intersección entre nuestro cilindro circular recto ya establecido y el cilindro parabólico que calcularemos a continuación; previamente buscaremos los puntos máximos y mínimos de la curva intersección. (Producción escrita G1, p.8)
- Realizan una gráfica de ambos cilindros y de la curva intersección, para verificar que la curva pertenezca a ambas superficies.
- Concluyen de acuerdo con los datos obtenidos.
- En la exposición oral, los estudiantes aplican la fórmula de la integral de línea de funciones reales. La docente les pregunta por qué usan esa fórmula. Justifican con la teoría que la misma mide el área de la cortina o valla debajo de la función $f(x,y)$. La docente pregunta qué es $f(x,y)$ y como no responden les aclara que se trata de una superficie. Además, les muestra que es inadecuada la aplicación de $|\vec{r}\,'(t)|$, ya que calculan al ds sobre una curva en el espacio, en tanto que la interpretación geométrica de la integral de línea es sobre una curva plana. Los estudiantes

justifican que buscaron ejercicios parecidos y vieron que $ds = |\vec{r}'(t)|dt$, sin prestar atención que esa interpretación corresponde a curvas planas. En este caso, los estudiantes afirman comprender el error.

- En la encuesta afirman que para verificar la coherencia de sus resultados se valieron de conversiones gráficas y aproximaciones.

Análisis de las producciones del Grupo 2

La resolución correspondiente al primer coloquio del Grupo 2 está disponible en el siguiente enlace, que también se ha incluido en el Anexo N° 4: https://drive.google.com/file/d/1PngBeGn1MCtieok_Cy9W0WXvYKAInFct/view?usp=sharing. A continuación se describe la misma a partir de las dimensiones del pensamiento matemático consideradas en este trabajo.

Razonamiento lógico-deductivo

- Traducen el problema del lenguaje natural al simbólico, lo cual supone una conversión (Duval, 2016).
- Recurren a la teoría de funciones vectoriales para hallar la ecuación de la hélice. Recurren también a la teoría de longitud de arco para resolver el problema, pero no explican por qué la utilizan.
- Realizan una gráfica de la situación, haciendo una conversión (Duval, 2016) entre la notación simbólica matemática y la representación visual del alambre con la hélice.
- Escriben las ecuaciones paramétricas de una recta. Afirman que el vector director va a estar determinado por la derivada de la función vectorial. Utilizan los conceptos matemáticos para determinarlo, argumentando que las funciones componentes son continuas.
- Realizan una cadena de razonamientos lógicos con sus datos generando la ecuación genérica de la recta tangente a la hélice y verificando si existe algún valor del parámetro t, tal que dicha recta pase por el suncho. Igualan componente a componente y observan que no existe un valor de t para que se verifiquen las 3 ecuaciones. En la exposición oral la docente aclara al grupo un error al escribir la ecuación de la recta tangente, que consiste en la utilización de un mismo parámetro en vez de usar dos diferentes, ya que no necesariamente deben coincidir dichos

parámetros al pasar por el suncho. Un estudiante aclara que era evidente que no existía, pero no justifica el porqué.

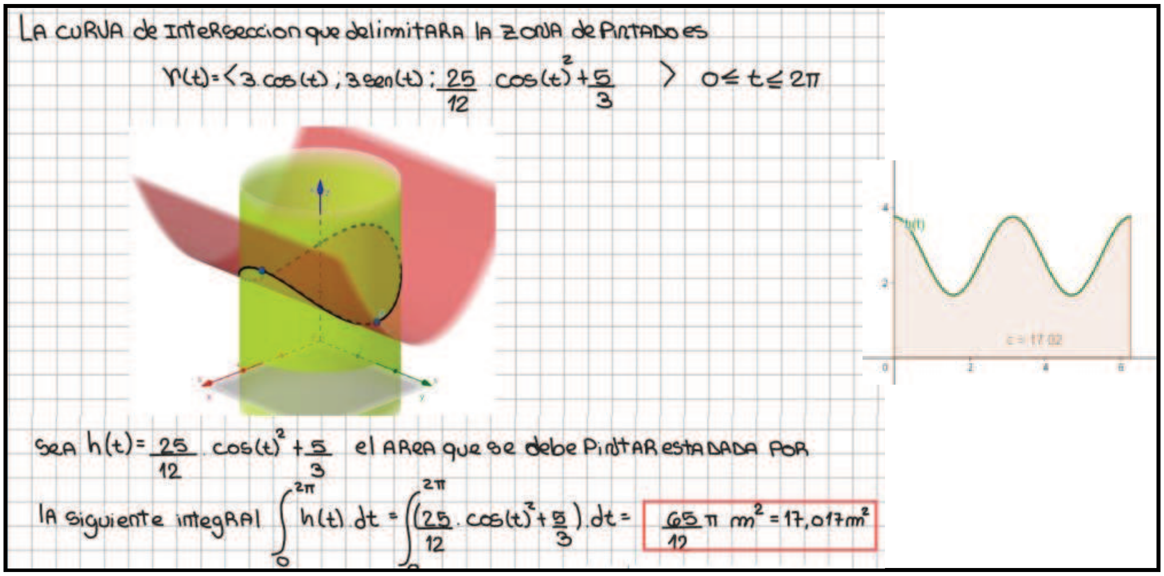
- Recurren a la fórmula de un cilindro parabólico genérico. Utilizan los puntos máximo y mínimo de la curva para hallar la ecuación del cilindro parabólico. En la exposición oral la docente pregunta cómo saben cuál es el punto más alto y un estudiante responde que es cuando el coseno es máximo que sería para el valor 0 del parámetro (porque pusieron la componente z en función del coseno).
- Realizan una adecuada conversión (Duval, 2016) entre la notación simbólica matemática y las representaciones visuales del silo.
- Muestran qué conceptos teóricos utilizan para la curva y mencionan que debe cumplir con la hipótesis de suavidad. Justifican teóricamente los pasos realizados.

Heurística

- Para la primera parte ubican la base del cilindro sobre el plano xy. Luego, para facilitar las cuentas, elevan el cilindro y la curva. En términos de Gutiérrez (1992) hacen un reconocimiento de las relaciones espaciales, registran las características y desplazamientos en el espacio de los objetos.
- Ajustan la ecuación general de un cilindro parabólico a sus puntos máximos y mínimos.
- Usan conocimientos de cálculo en una variable para hallar el área debajo de una curva. Interpretan que la función altura se las da la componente z de la curva e integran. Un extremo de integración es erróneo porque consideran un período $(0,2\pi)$ cuando deben integrar sobre el perímetro de la circunferencia (para que les dé toda la vuelta) (ver Figura 3).

Figura 3

Solución propuesta por G2 para el cálculo de la pintura



Metacognición

- En la exposición oral aclaran que con la escala dada se aproximan a las dimensiones del silo.
- Reflexionan sobre la solución obtenida cuando parametrizan una curva y como se dan cuenta que no cumple con la consigna usan proporcionalidad directa para calcular la última componente de la función vectorial asociada a dicha curva. Justifican diciendo que: *"Como una vuelta equivale a 360° (2π), y el alambre debe dar 6 vueltas, el parámetro t llegará a 12π. Sabiendo esto, nos disponemos a hallar el factor K"*. (Presentación oral G2)
- Verifican que la hélice cumpla con la consigna realizando una gráfica representativa.
- Verifican la solución obtenida mediante el cambio de registro de representación. Pasan de la expresión simbólica a la gráfica de la curva intersección y de ambos cilindros.
- En la exposición oral demuestran tener conciencia de los pasos realizados, explican por qué realizaron dichos pasos.
- Verifican con un software que la integral calculada coincida con el área bajo la curva. (ver Figura 2).
- En la encuesta afirman que se valieron de la verificación gráfica para comprobar si los resultados obtenidos eran coherentes con el problema. Verifican que las

superficies y la curva cumplieran con lo pedido. Para ver si la solución de la cantidad de alambre que se necesitaba para dar 6 vueltas al silo resulta coherente, calculan el perímetro del cilindro, lo multiplican por 6, alcanzando un resultado parecido a la cantidad de alambre. Así comprueban que el resultado obtenido es coherente. Para la pintura calculan el área "rectangular" entre el punto más alto y el más bajo para comprobar si el resultado es similar al hallado.

Conclusiones generales del coloquio 1

Se presenta en esta sección una síntesis de los resultados alcanzados por los ocho grupos analizados, organizada en torno a las dimensiones del pensamiento matemático (Díaz Lozada, 2018) y de los descriptores considerados en cada una. En la Tabla 3 se sintetizan estos resultados, en la que se señalan con una cruz (x) los descriptores identificados en la producción de cada grupo. Luego se presentan los resultados indicados en la tabla 3, organizados en torno a las distintas dimensiones del pensamiento matemático.

Tabla 3

Resumen coloquio 1

Dimensiones del Pensamiento Matemático	Indicadores	Descriptores generales	g 1	g 2	g 3	g 4	g 5	g 6	g 7	g 8	%
Razonamiento Lógico-Deductivo	Aplicar conceptos y proposiciones	Recurrir a teoría relacionada	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Organizar y representar la información que brinda el problema	Realizar una gráfica	X		X	X	X	X	X	X	88%
		Reinterpretar el problema en un lenguaje diferente	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Deducir consecuencias de los datos del problema	Realizar cadenas de razonamientos lógicos	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Argumentar y demostrar proposiciones	Realizar un proceso de validación		X					X		25%
Heurística	Identificar nexos y relaciones	Relacionar proceso de solución con el problema	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
		Razonar por analogía				X		X			25%
	Variar las condiciones iniciales del problema	Simplificar el problema									0%
		Dividir el problema en subproblemas	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
		Introducir un elemento auxiliar									0%
	Identificar casos particulares	Análisis sistemático de casos									0%
		Analizar casos límites o especiales									0%
		Analizar ejemplos								X	13%
	Explorar diferentes vías de solución	Buscar diferentes vías de solución					X				13%
Metacognición	Organización del conocimiento	Organizar el conocimiento	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Verificación de la solución obtenida	Verificar utilizando distintos registros de representación	X	X	X	X	X	X		X	88%
		Verificar utilizando casos particulares									0%
		Verificar si la respuesta es viable	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Controlar la ejecución de la vía de solución	Tomar conciencia de los pasos realizados	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Reflexionar acerca de la vía de solución	Reflexionar acerca de la vía de solución.	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Identificar alternativas de vías de solución	Identificar varias vías de solución.					X		X		25%
	Identificar fortalezas y debilidades	Identificar fortalezas y debilidades	X		X			X			38%

Razonamiento lógico-deductivo

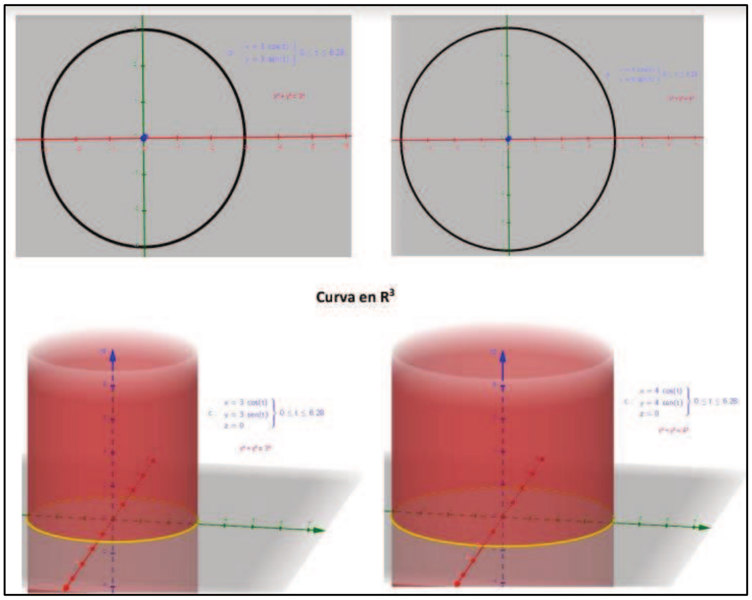
- El 100% de los grupos recurren a la teoría relacionada. Utilizaron conceptos trabajados en las clases teóricas y prácticas, tales como función vectorial relacionada a una curva, la fórmula de longitud de arco, la recta tangente a una curva y la aplicación de una integral de línea de un campo vectorial. En las presentaciones orales justifican la relación con la teoría y el porqué de su utilización.
- El 88% realiza una gráfica para entender mejor el problema. Con la ayuda de un software, en este caso GeoGebra, los estudiantes realizan la gráfica de la parte cilíndrica del silo. Al no saber parametrizar superficies utilizan la ecuación del cilindro de forma implícita dando como resultado un cilindro infinito, pero lo acotan con dos planos perpendiculares a la generatriz del cilindro para delimitar el silo. Todos los grupos centran la base del cilindro en el origen de coordenadas.
- El 100% reinterpreta el problema en un lenguaje diferente. Las consignas se presentan en lenguaje coloquial e incluyen también una foto de un silo y una gráfica cartesiana en dos dimensiones, y los estudiantes logran cambiar de representación semiótica (conversiones, en el sentido de Duval, 2016) utilizando la notación simbólica matemática. La representación en coordenadas cartesianas ortogonales se puede considerar también como un tratamiento (de la representación visual fotográfica a la representación cartesiana).
- El 100% realiza cadenas de razonamientos lógicos. Interpretan el problema, lo llevan a un lenguaje simbólico matemático y realizan un adecuado tratamiento (en el sentido de Duval, 2016) de las fórmulas implicadas hasta llegar a un resultado. Por ejemplo, para calcular la cantidad de alambre que se necesita para el refuerzo del silo, primero interpretan que se trata de una curva denominada hélice, utilizan proporcionalidad directa para encontrar la ecuación de la curva y luego utilizan la longitud de arco para hallar su extensión.
- Solo el 25% verifica las hipótesis de los teoremas antes de utilizarlos. Solo dos grupos (G2 y G7) prueban que la curva hallada es suave, condición necesaria, para utilizar la fórmula de longitud de arco. La verificación la realizan durante la exposición oral, afirman que la curva cumple con la condición de suavidad porque la derivada de $\vec{r}(t)$ es continua y no nula.

Heurística

- El 100% identifica nexos y relaciones en el proceso de resolución del problema. Si bien en las producciones escritas estregadas previas a la exposición oral no se evidencian nexos entre las resoluciones y el problema, durante la presentación oral todos los grupos establecen la conexión entre los pasos realizados y el problema planteado.
- El 25% de los grupos (G4 y G6) razona por analogía. Logran interpretar distintos momentos del problema utilizando ejercicios resueltos en clases e identificando que su resolución es similar a los ejercicios vistos con anterioridad.
- Ningún grupo simplifica el problema, esto podría ser porque la consigna es clara y directa. Por ello, los estudiantes no vieron la necesidad de simplificar el problema.
- El 100% de los grupos divide el problema en subproblemas. La consigna podía dividirse en tres subconsignas disjuntas entre sí, facilitando la resolución del problema.
- Ningún grupo introduce un elemento auxiliar o analiza sistemáticamente casos o casos límites. Con respecto a este resultado, se considera que la consigna no es lo suficientemente abierta para que los estudiantes identifiquen casos especiales o límites.
- Solo un grupo (el 13%, G8) analiza un ejemplo para explorar el problema. Este grupo, con el fin de explorar el problema, propone distintos valores para el radio del cilindro, como se observa en la Figura 4.

Figura 4

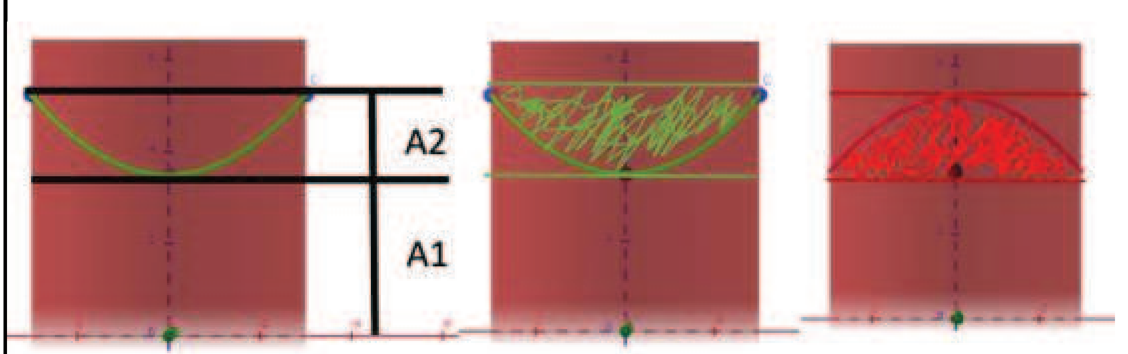
Evaluación de G8 de diferentes radios del cilindro



- Solo el 13% (G5) explora dos vías de soluciones diferentes. En la resolución escrita muestran dos formas diferentes para calcular la cantidad de pintura que se necesita para pintar el logo de la empresa. Lo resuelven de modo diferente y llegan al mismo resultado, como se puede observar en las Figuras 5 y Figura 6.

Figura 5

Cálculo de G5 de la cantidad de pintura reconociendo características del objeto.



$$A_T = A_1 + A_2 = 21\pi + \frac{21}{4}\pi = \frac{105}{4}\pi\, m^2 \cong 82{,}47\, m^2$$

Figura 6

Cálculo de G5 de la cantidad de pintura utilizando una integral de línea

$$A = \int_0^{2\pi} \left(\frac{7}{36}.(x)^2 + 3{,}5\right) * (|\mathbf{r}'(\mathbf{t})|)\ dt \ = \int_0^{2\pi} \left(\frac{21}{4}.(\cos(t))^2 + \frac{21}{2}\right) dt \ \cong \mathbf{82.47\ m^2}$$

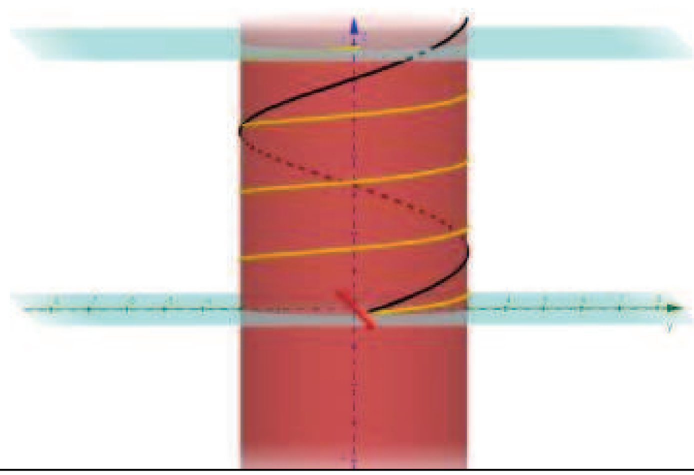
Metacognición

- El 100% de los grupos organiza el conocimiento y los conceptos que utiliza a lo largo de la resolución. Los grupos construyen una lista con los datos que tienen del problema y las fórmulas que utilizarán en su resolución.
- El 88% verifica las respuestas obtenidas utilizando un registro de representación distinto de aquel en que se produjo la respuesta. Por ejemplo: realizan una conversión entre la notación simbólica matemática y las representaciones visuales del silo-alambre. Para comprobar que la función vectorial hallada como la intersección de dos superficies es correcta la grafican junto con las superficies y de ese modo comprueban que las tres coinciden. Como se puede apreciar en la Figura 7 extraída de la producción escrita de G5.

Figura 7

Conversión de G5 de notación simbólica a representación gráfica

La ecuación de nuestra hélice quedara así $\begin{cases} x_{(t)} = 3.\cos(t) \\ y_{(t)} = 3.sen(t) \\ z = \frac{7}{8\pi}.t \end{cases}$ con $0 \leq t \leq 8\pi$



- Ningún grupo verifica usando casos particulares para comprobar si llegan a algún error o contradicción.
- En las encuestas realizadas luego del coloquio, el 100% de los grupos manifiesta que verifican la coherencia de las respuestas. Por ejemplo, para calcular la longitud del alambre usan la fórmula de la longitud de la circunferencia y multiplican el valor hallado por la cantidad de vueltas que daba el alambre para ver si obtenían resultados similares. Para calcular el área pintada del silo, calculan el área superficial del cilindro, que tenía que ser mayor al obtenido en el cálculo del área pintada.
- El 100% de los grupos explica los pasos realizados durante el proceso de resolución. Hacen una pequeña narrativa donde justifican o explican el porqué de las decisiones tomadas durante la resolución del problema. A modo de ejemplo, se incluye en la Figura 8 la explicación del G3.

Figura 8

Narrativa del G3

Observando la forma que debe adoptar el alambre de acuerdo a la superficie que se desea recorrer, se determinó que se trata de una hélice, cuya forma general paramétrica es:

$$r(t): \begin{cases} x(t) = r.cos(t) \\ y(t) = r.sen(t) \\ z(t) = k.t \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Se decidió colocar los ejes coordenados de tal manera que el origen coincida con el centro de la base inferior del cilindro circular recto, cuya altura es 5.8[m] y radio 3[m], para simplificar las expresiones y los cálculos

- El 100% reflexiona acerca de la vía de solución. En las encuestas manifiestan que hubo discusiones entre los diferentes integrantes de cada grupo sobre cuál era la vía de solución y qué camino seguir.
- Solo dos grupos (25%, G5 y G7) reconocen que pueden existir varias vías de solución. Un grupo lo manifiesta en la presentación escrita y el otro en la encuesta. Sostienen que hallaron otra vía de solución para el problema de la pintura, pero como no era “muy matemático” la descartaron.

- El 38% de los grupos (G1, G3 y G6) identifica fortalezas y debilidades durante la resolución del problema. En la narrativa de sus trabajos se observan frases como "tuvimos dificultad para encontrar …" (Presentación oral G3). Estos grupos son conscientes de sus debilidades y fortalezas en la resolución del problema.

3.4.2. Análisis de las producciones orales y escritas del coloquio 2

Análisis de las producciones del Grupo 1

La resolución correspondiente al segundo coloquio del Grupo 1 se encuentra disponible en el siguiente enlace, que se ha incluido también en el Anexo N° 4: https://drive.google.com/file/d/1mxEcVV9hMitBg9-p8aKifxE-mNiynj4b/view?usp=sharing. A continuación, se describe la misma a partir de las dimensiones del pensamiento matemático (Díaz Lozada, 2018) consideradas en este trabajo.

Razonamiento lógico-deductivo

- Representan la información del problema y los resultados del coloquio anterior en un gráfico que ayuda a comprender mejor el problema. Grafican el silo junto con la curva que describe el movimiento del insecto. Ubican los ejes coordenados y gráficamente determinan los puntos más bajos y altos de la curva.
- Reinterpretan el problema en un lenguaje diferente, traduciéndolo de un lenguaje coloquial al lenguaje simbólico matemático y realizan las conversiones (Duval, 2016) de los mismos a la representación gráfica. Por ejemplo, cuando se les pregunta cómo cambia la temperatura, los estudiantes lo interpretan como la razón de cambio de la temperatura.
- Recurren a la teoría relacionada cuando utilizan la función distancia entre dos puntos.
- Realizan un tratamiento (Duval, 2016) de las fórmulas matemáticas hasta llegar al resultado.
- Realizan un proceso de validación verificando que se cumplan las hipótesis respecto de que la función temperatura es diferenciable en el punto hallado.
- Realizan una cadena de razonamientos lógicos para hallar la dirección pedida.
- Calculan la derivada direccional en el punto más bajo de la curva en vez de hacer regla de la cadena, ya que el insecto camina sobre la curva y no se sale de ella.

Heurística

- Para encontrar el punto hacia donde se debe dirigir el insecto para tener la temperatura ideal, los estudiantes igualan la función temperatura a la temperatura ideal y despejan z. Toman en cuenta las restricciones de que el radicando sea mayor o igual a cero y que sea menor que un cierto valor para que la dirección no les quede hacia adentro del silo. Toman un valor para la componente y (caso particular). Luego despejan para obtener los valores de x y z. No generalizan, solo se quedan con ese caso porque satisface la consigna.
- Desde la gráfica de la curva sobre el cilindro, ubican la vista gráfica de manera de obtener el punto más bajo de la curva.

Metacognición

- Organizan los datos y condiciones del problema.
- Controlan la ejecución, realizando una explicación de los pasos realizados.
- Toman conciencia de los pasos realizados cuando afirman:
  este planteo lo hacemos para encontrar un punto fuera del silo para cuando generemos un vector que vaya desde el punto máximo al punto calculado no apunte hacia el interior del silo lo cual sería imposible o absurdo, ya que el insecto debería atravesar la pared del silo. (Producción escrita G1)
- Reflexionan acerca de la vía de solución cuando en la cadena lógica realizada podría no ser cierta, por ejemplo, cuando afirman "*Este razonamiento no nos asegura de que exista dicha dirección posible*" (Producción escrita G1).
- Verifican la solución obtenida cambiando los registros de representación. Ubican el silo, la curva y la dirección ideal. Aclaran que en la gráfica representada el vector no es unitario, pero tiene la misma dirección y sentido que el vector u encontrado.

Análisis de las producciones del Grupo 2

La resolución correspondiente al segundo coloquio del Grupo 2 está disponible en el siguiente enlace, que se incluye también en el Anexo N° 4: https://drive.google.com/file/d/1PvsxsuRDuQQYH1_h-wEYbngADc9lz08b/view?usp=sharing. A continuación, se describe la misma a partir de las dimensiones del pensamiento matemático (Díaz Lozada, 2018) consideradas en este trabajo.

Razonamiento lógico-deductivo

- Recurren a la teoría relacionada para calcular la función temperatura, una razón de cambio, curvas de nivel y la recta normal a una superficie dada en forma explícita.
- Realizan una gráfica para comprender mejor dónde irán ubicados los aros de refuerzo del cono inferior.
- Reinterpretan el problema pasando de un lenguaje coloquial al simbólico matemático (conversión en el sentido de Duval, 2016).
- Realizan una cadena de razonamientos lógicos para calcular la razón de cambio de la temperatura cunado el insecto se mueve sobre una curva.

Heurística

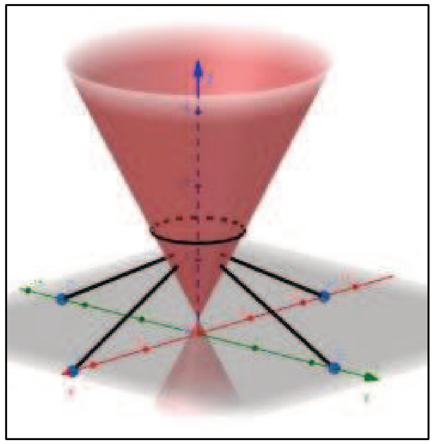
- Realizan nexos entre el problema y la resolución del mismo.
- Simplifican el problema de hallar la razón de cambio de la temperatura cuando el insecto camina por la curva. Los estudiantes reemplazan las variables de la función temperatura con las componentes de la función vectorial asociada a la curva. De ese modo, simplifican el problema a uno de una sola variable.

Metacognición

- Organizan el conocimiento haciendo una lista de los resultados del coloquio anterior junto con sus gráficas.
- Verifican utilizando distintos registros, en este caso realizan una gráfica del cono inferior del silo y los cuatro tensores normales a la superficie, como se puede ver en la Figura 9.

Figura 9

Representación gráfica en el proceso de validación



- Toman conciencia de los pasos realizados realizando una breve explicación en los distintos pasos del problema. Por ejemplo, cuando afirman:
  Como en la parte cilíndrica las sumatoria de los cuadrados de las coordenadas x e y siempre darán como resultado 9 debido a que el insecto se ve obligado a caminar sobre dicha superficie, la temperatura solo dependerá de la coordenada z. (Producción escrita de G2).
- Reflexionan sobre la vía de solución, por ejemplo, cuando deben sacar la temperatura ideal del insecto, y afirman que si el mismo se encuentra sobre el silo entonces la temperatura depende de z y solo debe descender el insecto hasta dicho valor de z.
- Justifican la elección de la ubicación de las varillas normales a la superficie afirmando, en la presentación oral, que:
  Decidimos ubicar los extremos de las varillas a una cota de cuatro metros respecto a la cúspide del cono, porque ahí se encuentra el centro de gravedad del cono, es decir, a un tercio de la altura medido desde la base.

Conclusiones generales del coloquio 2

En primer lugar, se resumen en la Tabla 4 los descriptores observados en las resoluciones de los ocho grupos. Posteriormente se describen las conclusiones generales para cada dimensión del pensamiento matemático (Díaz Lozada, 2018).

Tabla 4

Resumen coloquio 2

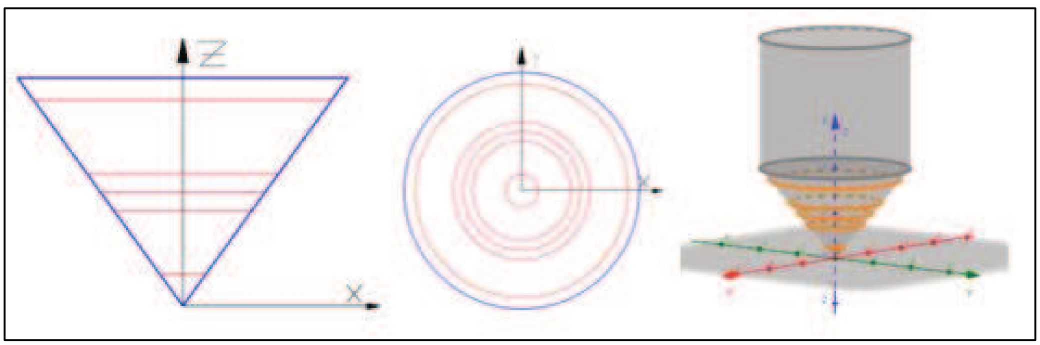
Dimensiones del Pensamiento Matemático	Indicadores	Descriptores generales	g 1	g 2	g 3	g 4	g 5	g 6	g 7	g 8	%
Razonamiento Lógico-Deductivo	Aplicar conceptos y proposiciones	Recurrir a teoría relacionada	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Organizar y representar la información que brinda el problema	Realizar una gráfica	X	X	X	X	X	X		X	88%
		Reinterpretar el problema en un lenguaje diferente	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Deducir consecuencias de los datos del problema	Realizar cadenas de razonamientos lógicos	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Argumentar y demostrar proposiciones	Realizar un proceso de validación	X							X	25%
Heurística	Identificar nexos y relaciones	Relacionar proceso de solución con el problema	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
		Razonar por analogía									0%
	Variar las condiciones iniciales del problema	Simplificar el problema		X							13%
		Dividir el problema en subproblemas	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
		Introducir un elemento auxiliar									0%
	Identificar casos particulares	Análisis sistemático de casos									0%
		Analizar casos límites o especiales									0%
		Analizar ejemplos	X		X			X			38%
	Explorar diferentes vías de solución	Buscar diferentes vías de solución									0%
Metacognición	Organización del conocimiento	Organizar el conocimiento	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Verificación de la solución obtenida	Verificar utilizando distintos registros de representación	X	X	X	X	X	X		X	88%
		Verificar utilizando casos particulares					X				13%
		Verificar si la respuesta es viable	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Controlar la ejecución de la vía de solución	Tomar conciencia de los pasos realizados	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Reflexionar acerca de la vía de solución	Reflexionar acerca de la vía de solución.	X	X			X				38%
	Identificar alternativas de vías de solución	Identificar varias vías de solución.									0%
	Identificar fortalezas y debilidades	Identificar fortalezas y debilidades			X		X				25%

Razonamiento lógico-deductivo

- El 100% de los grupos recurre a la teoría relacionada. Utiliza conceptos dados en clases tales como funciones de varias variables, derivada direccional, regla de la cadena, curvas de nivel y vector gradiente. En las presentaciones orales justifica la relación con la teoría y el porqué de su utilización.
- El 88% realiza una gráfica para entender mejor el problema. Ayudándose con un software, en este caso GeoGebra, los estudiantes construyen la gráfica de la parte cilíndrica y el cono inferior del silo, para decidir dónde colocar los ejes coordenados, y así escribir la función temperatura. También realizan gráficas para determinar dónde ubicar los aros circulares de refuerzo del cono inferior. A modo de ejemplo, se incluyen en la Figura 10 las gráficas del G3.

Figura 10

Gráficas del G3 para comprender mejor el problema



- El 100% reinterpreta el problema en un lenguaje diferente. Las consignas están presentadas en un lenguaje coloquial y los estudiantes convierten la representación semiótica utilizando la notación simbólica matemática.
- El 100% realiza cadenas de razonamientos lógicos. Interpreta el problema llevándolo a un lenguaje simbólico matemático y realiza un buen tratamiento de las fórmulas implicadas hasta llegar a un resultado.
- Solo el 25% verifica las hipótesis de los teoremas antes de utilizarlos. Solo dos grupos (G1 y G8) prueban que la función temperatura es diferenciable, condición necesaria para usar la fórmula de la derivada direccional y la regla de la cadena (ver Figura 11 del G8).

Figura 11

Verificación de diferenciabilidad de la función temperatura

$$Tx(x;y;z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+(z+1{,}5)^2}} \qquad Ty(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+(z+1{,}5)^2}} \qquad Tz(x,y,z) = \frac{z+1.5}{\sqrt{x^2+y^2+(z+1{,}5)^2}}$$

$$x^2 + y^2 + (z+1{,}5)^2 \geq 0 \rightarrow \text{Tx, Ty, Tz son continuas } \forall (x;y;z) \neq (0;0;-1.5) \rightarrow \text{Vertice del silo}$$

Heurística

- El 100% identifica nexos y relaciones en el proceso de resolución del problema. En la presentación oral todos los grupos establecen la conexión entre los pasos realizados y el problema.
- Ningún grupo razona por analogía.
- Un solo grupo (13%, G2) simplifica el problema. Para calcular la razón de cambio transforma la expresión a una función de una sola variable (ver Figura 12).

Figura 12

Simplificación del problema del G2

Siendo la función que representa a la temperatura:

$$T(x;y;z) = d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Y estando representado el borde de la pintura a través de la curva:

$$r(t) = < 3\cos(t)\,; 3sen(t); \frac{25}{12}\cos^2(t) + \frac{23}{3} > \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Reemplazando r(t) en T(x;y;z):

$$T(t) = \sqrt{(3\cos(t))^2 + (3sen(t))^2 + \left(\frac{25}{12}\cos^2(t) + \frac{23}{3}\right)^2}$$

- El 100% de los grupos divide el problema en subproblemas. La consigna podía dividirse en cuatro subconsignas disjuntas entre sí, lo cual facilitó la resolución del problema.
- Ningún grupo introduce un elemento auxiliar o analiza sistemáticamente casos o casos límites. La consigna era abierta cuando se pide a los estudiantes que decidan cuántos aros de refuerzo colocar en el cono inferior del silo y dónde ubicar cada uno. Ningún grupo analiza diferentes casos o casos límite.

- El 38% (Grupos G1, G3 y G6) analiza un ejemplo para explorar el problema.
- Ningún grupo plantea vías de soluciones diferentes.

Metacognición

- El 100% de los grupos organiza el conocimiento y los conceptos que utilizarán a lo largo de la resolución. Los grupos realizan una lista con los datos que tienen del problema y los resultados del coloquio anterior.
- El 88% verifica las respuestas obtenidas utilizando otro registro de representación distinto de aquel en que se produjo la respuesta. Realizan una conversión entre la notación simbólica matemática y las representaciones visuales. Por ejemplo, la gráfica de los aros de refuerzo o las cuatro varillas normales a la superficie deben coincidir con lo hallado analíticamente.
- Un solo grupo (13%, G5) verifica usando casos particulares para ver si no llega a algún error o contradicción (ver Figura 13).

Figura 13

Verificación de G5 de casos particulares

Si tomamos un punto cualquiera que pertenezca a la intersección, como por ejemplo el (3, 0, 4.43), y calculamos la temperatura en dicha posición obtenemos:

$$\boldsymbol{T(3, 0, 4.43) = \sqrt{3^2 + 0^2 + (4.43)^2} = 5.35°C}$$

- El 100% de los grupos manifiesta, en las encuestas realizadas luego del coloquio, que verifican la coherencia de las respuestas mediante la comprobación gráfica.
- El 100% de los grupos realiza explicaciones de los pasos realizados durante el proceso de resolución. Incluye una pequeña narrativa donde justifican las decisiones tomadas en la resolución del problema. A modo de ejemplo, se incluye la narrativa de G4 (Figura14)

Figura 14

Fragmento de las narrativas del G4

Puesto que el insecto está parado en un punto de la superficie T(x0 , y0 , z0) y se desea la razón de cambio de la función, en una dirección diferente a la de los versores **i, j,y k** . Se utilizará la derivada direccional.

Du T(x,y,z)= Tx(x,y,z)a +Ty(x,y,z)b +Tz(x,y,z)c

Es decir, Du es la derivada direccional en dirección a u de T(x,y,z).

Por otro lado, si T(x,y,z) es diferenciable

$$\mathbf{\nabla T(x, y, z)} = < \mathrm{Tx}(x, y, z); \mathrm{Ty}(x, y, z); \mathrm{Tz}(x, y, z) >$$

Luego con $\mathbf{u} = <a,b,c>$ y $|u|=1$

Se tiene que:

$$\mathbf{\nabla T(x, y, z) u} = \mathrm{Du}\, \mathrm{T}(x, y, z)$$

- El 38% (G1, G2 y G5) reflexiona acerca de la vía de solución, ajustando o modificando la solución obtenida.
- Ningún grupo busca vías de solución diferentes.
- El 25% (G3 y G5) de los grupos identifica fortalezas y debilidades durante la resolución del problema.

3.4.3. Análisis de las producciones orales y escritas del coloquio 3

Análisis de las producciones del Grupo 1

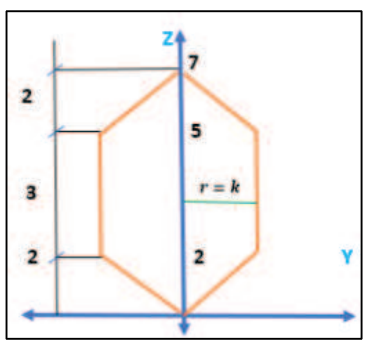
La resolución correspondiente al tercer coloquio del Grupo 1 se encuentra disponible en el siguiente enlace, que también se ha incluido en el Anexo N° 4: https://drive.google.com/file/d/1XwvxdMOKpsXt_OQLp0x8BzqfG5Rsea5Z/view?usp=sharing. A continuación, se describe la misma a partir de las dimensiones del pensamiento matemático (Díaz Lozada, 2018) consideradas en este trabajo.

Razonamiento Lógico- Deductivo

- Recurren a la teoría relacionada cuando expresan las variables en coordenadas polares. También cuando usan la ecuación general del cono y calculan una integral triple en coordenadas cilíndricas
- Reinterpretan el problema traduciéndolo del lenguaje coloquial al lenguaje simbólico matemático (es decir, a partir de una conversión en el sentido de Duval, 2016).
- Realizan cadenas de razonamientos lógicos, por ejemplo, para hallar las ecuaciones de los conos, relacionando las ecuaciones generales, las coordenadas cilíndricas con los datos del problema. También cuando calculan las medidas de la mezcladora, fijan dos variables y expresan las superficies en función del radio del cilindro, que denotan con k. Utilizan una integral triple en coordenadas cilíndricas para calcular el volumen y despejar k con el dato del problema.
- Grafican el corte transversal de la mezcladora para interpretar el problema y así observar cómo varían los extremos de integración (ver Figura 15).

Figura 15

Corte transversal de la mezcladora



Heurística

- Relacionan el problema con la resolución planteada cuando, por ejemplo, usan el resultado de una integral triple para afirmar que dicho resultado es el volumen total del silo. También cuando afirman:
  El funcionamiento de la mezcladora es remover todos los granos, varias veces al día, para obtener un porcentaje de humedad uniformemente, lo cual es importante en la industria agrícola por dos razones, la primera es para evitar que se pudran los granos y la segunda es que si el grano posee cierto porcentaje de humedad aumenta su peso, es decir que el grano pierde valor, por lo tanto la mezcladora junto con una

sopladora hacen que el porcentaje de humedad sea el óptimo para su venta y conservación. (Producción escrita de G1)

- Identifican un caso particular analizando un ejemplo, fijando dos variables y dejando libre la tercera para calcularla con los datos del problema. Para ello los estudiantes afirman:

  Decidimos plantear que las medidas de la mezcladora serán de, 2(m) de altura para cada semicono circular y 3(m) de altura para el cilindro circular recto; pero podrá variar el radio del cilindro de dicha mezcladora para lograr el volumen solicitado. (Producción escrita de G1)

  Pero luego se quedan con esa solución obtenida sin buscar la generalidad.

Metacognición

- Organizan los conocimientos y los datos del problema que los ayudará en la resolución.
- Verifican utilizando otro registro de representación (conversión), en este caso, grafican el cilindro y los dos conos para verificar que concuerde con las dimensiones del silo de la fotografía.
- Justifican la elección del tornillo sin fin con videos explicativos de qué es un tornillo sin fin, su funcionamiento interior y cómo se utiliza en la industria agrícola para extraer los granos del silo y su traslado de una máquina a otra.
- Realizan una narrativa de los pasos a realizar dando una explicación, en su proceso de justificación, de por qué hacen lo que hacen. Por ejemplo, cuando afirman "*Como la ecuación está en coordenadas cartesianas, tuvimos que pasarlo a coordenadas cilíndricas haciendo lo siguiente* …" (Producción escrita de G1).
- Reflexionan sobre la vía de solución, por ejemplo, para determinar dónde colocar la mezcladora y el porqué de la elección de esa ubicación. Afirman:

  Para esto decidimos (por simetría) colocar la mezcladora en el centro del silo, es decir en el X = 0 e Y = 0, y para bajar un poco más el centro de gravedad, lo colocamos lo más cercano posible a la parte inferior del silo, lo cual también nos beneficia para que se pueda mezclar todo el grano que coloquemos en el interior del silo. (Producción escrita de G1)
- Identifican debilidades cuando manifiestan: "*Tuvimos inconvenientes con la posición del silo y los ejes coordenados, ya que una parte del mismo era negativa, entonces*

para poder calcular el volumen total con integrales triples, decidimos desplazar el silo hacia arriba." (Producción escrita de G1)

Análisis de las producciones del Grupo 2

La resolución correspondiente al tercer coloquio del Grupo 2 se incluye en el siguiente link: https://drive.google.com/file/d/1OKf95o1iQtsHEswlRFFrG5VQVoRxvpch/view?usp=sharing, que figura también en el Anexo N° 4. A continuación, se describe la misma a partir de las dimensiones del pensamiento matemático (Díaz Lozada, 2018) consideradas en este trabajo.

Razonamiento Lógico- Deductivo

- Aplican conceptos y proposiciones cuando recurren a la teoría relacionada, como por ejemplo, cuando calculan el volumen a través de una integral triple en coordenadas cilíndricas.
- Reinterpretan el problema traduciéndolo del lenguaje coloquial a la simbología matemática.
- Realizan un tratamiento de la integral triple para calcular el volumen del silo.

Heurística

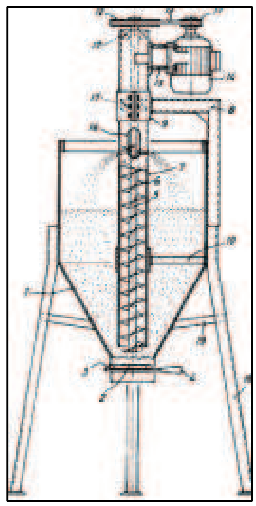
- Dividen el problema en subproblemas para hacer más fácil su resolución. Por ejemplo, dividen al silo en un semicono y un cilindro para calcular los volúmenes por separados y después sumarlos. Afirman "*se procede a dividir el mismo en un cono y un cilindro y se calcula el volumen de cada uno. Las partes mencionadas son llevadas al origen con la finalidad de hacer su resolución más sencilla.*" (Producción escrita de G2)
- Relacionan el problema con la resolución planteada cuando, por ejemplo, afirman: "*Siendo el volumen total del silo la sumatoria de los resultados obtenidos …"* (Producción escrita de G2)
- Investigan en internet las diferentes mezcladoras que existen y afirman:
  Para determinar las dimensiones de la misma, primero se adopta el siguiente tipo de mezcladora la cual se extrae de una investigación realizada acerca de distintos tipos existentes. Dichas mezcladoras se utilizan para lograr una homogeneidad entre los granos que se encuentren en el silo, con este fin se realiza una búsqueda

de tipos de mezcladoras que, por sus dimensiones, sea posible adaptarlas a nuestro caso en estudio. (Producción escrita de G2)

Presentan una figura con la opción elegida por los estudiantes (ver Figura 16).

Figura 16

Mezcladora presentada por los estudiantes

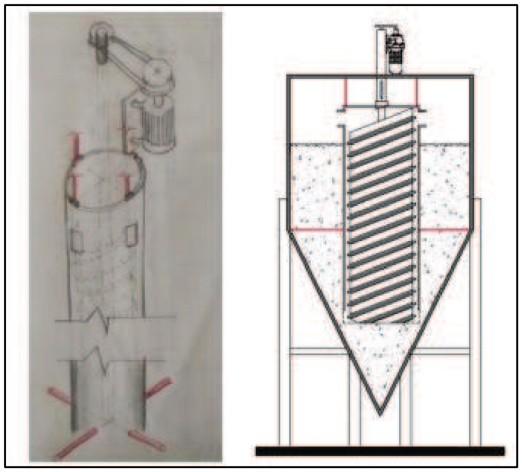


- Para determinar cómo y dónde se colocará la mezcladora con los tensores correspondientes los estudiantes realizan un croquis (Figura 17) y afirman:

  Se puede ver en rojo, cuatro tensores verticales que se encargaran de dar estabilidad y mantener en la posición final al cilindro que contiene a la mezcladora. En cuanto a los tensores horizontales, se disponen una cantidad total de 4, los mismos se colocan con la finalidad de evitar las oscilaciones de la mezcladora respecto al punto de anclaje en el extremo superior de la misma a causa de la distribución dispareja de los granos en el silo y las vibraciones generadas por el mecanismo. En el croquis se ven dos posibles niveles donde estos tensores horizontales pueden ser colocados. En la figura se ilustra el mecanismo y los puntos de anclaje del cilindro que contiene a la mezcladora. (Producción escrita de G2)

Figura 17

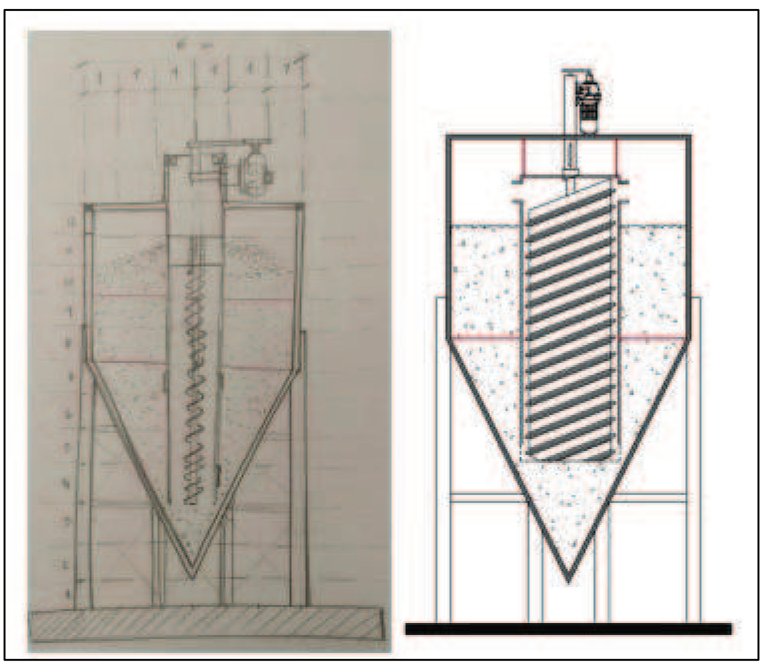
Croquis realizado por G2



- Exploran dos vías de solución diferentes cuando buscan la mejor manera de situar los tensores que sostienen la mezcladora (Figura 18). Afirman: "*En el croquis se ven dos posibles niveles donde estos tensores horizontales pueden ser colocados*". (Producción escrita de G2)

Figura 18

Imágenes de G2 que muestran dos formas de colocar los tensores



Metacognición

- Controlan la ejecución de la vía de solución, toman conciencia de los pasos realizados, haciendo una breve descripción de los pasos para resolver el problema. Buscan diferentes alternativas de mezcladoras hasta encontrar la que mejor se adapte al problema.
- Reflexionan acerca de la vía de solución, realizan dos diferentes gráficos para definir dónde colocar los tensores que generen la menor vibración dentro del silo.
- Identifican varias vías de solución. Al buscar información en internet encuentran diferentes formas de mezcladoras de granos. Deciden quedarse con la que consideran más adecuada para el problema. Luego buscan diferentes maneras de colocar los tensores que sostienen a la mezcladora.

Conclusiones generales de todos los grupos del coloquio 3

En la Tabla 5 se resumen los resultados respecto de los descriptores utilizados por los ocho grupos. A continuación de la misma se presenta una descripción de los principales resultados en cada una de las dimensiones del pensamiento matemático.

Tabla 5

Resumen coloquio 3

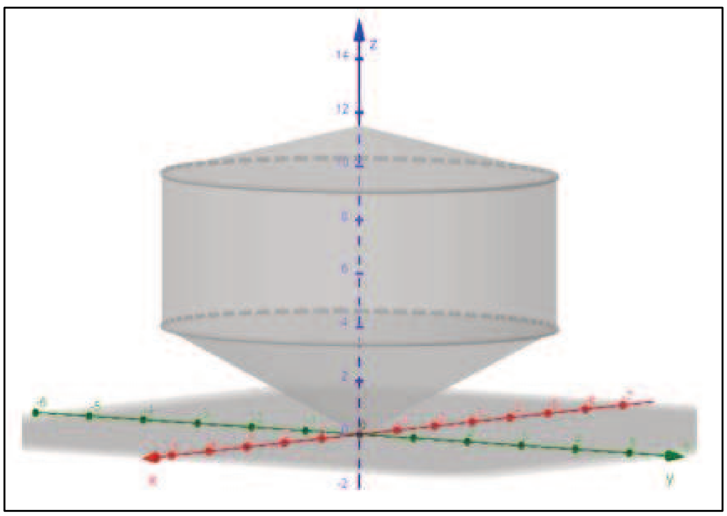
Dimensiones del Pensamiento Matemático	Indicadores	Descriptores generales	g 1	g 2	g 3	g 4	g 5	g 6	g 7	g 8	%
Razonamiento Lógico-Deductivo	Aplicar conceptos y proposiciones	Recurrir a teoría relacionada	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Organizar y representar la información que brinda el problema	Realizar una gráfica	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
		Reinterpretar el problema en un lenguaje diferente	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Deducir consecuencias de los datos del problema	Realizar cadenas de razonamientos lógicos	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Argumentar y demostrar proposiciones	Realizar un proceso de validación									0%
Heurística	Identificar nexos y relaciones	Relacionar proceso de solución con el problema	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
		Razonar por analogía				X	X				25%
	Variar las condiciones iniciales del problema	Simplificar el problema									0%
		Dividir el problema en subproblemas	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
		Introducir un elemento auxiliar									0%
	Identificar casos particulares	Análisis sistemático de casos									0%
		Analizar casos límites o especiales									0%
		Analizar ejemplos	X								13%
	Explorar diferentes vías de solución	Buscar diferentes vías de solución		X							13%
Metacognición	Organización del conocimiento	Organizar el conocimiento	X		X	X	X				50%
	Verificación de la solución obtenida	Verificar utilizando distintos registros de representación			X		X	X			38%
		Verificar utilizando casos particulares									0%
		Verificar si la respuesta es viable	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Controlar la ejecución de la vía de solución	Tomar conciencia de los pasos realizados	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Reflexionar acerca de la vía de solución	Reflexionar acerca de la vía de solución.	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Identificar alternativas de vías de solución	Identificar varias vías de solución.		X							13%
	Identificar fortalezas y debilidades	Identificar fortalezas y debilidades	X		X		X			X	50%

Razonamiento lógico-deductivo

- El 100% de los grupos recurre a la teoría relacionada. Utilizaron conceptos trabajados en clases teóricas y prácticas como cálculo de volumen utilizando integrales triples en coordenadas cilíndricas y algunos grupos utilizan el concepto y el cálculo del centro de masa.
- El 100% realiza una gráfica para entender mejor el problema. Con la ayuda de GeoGebra, los estudiantes realizan la gráfica del silo y de la proyección del mismo sobre un plano coordenado para determinar cómo varían los extremos de integración de la integral triple. A modo de ejemplo, se incluye en la Figura 19 el gráfico del G3.

Figura 19

Gráfico del silo para determinar los extremos de integración



- El 100% reinterpreta el problema en un lenguaje diferente. Las consignas se dan en lenguaje coloquial y los estudiantes logran cambiar de representación semiótica utilizando la notación simbólica matemática (conversión en el sentido de Duval, 2016).
- El 100% realiza cadenas de razonamientos lógicos. Logran interpretar el problema, llevarlo a un lenguaje simbólico matemático y hacer un buen tratamiento de las fórmulas implicadas hasta llegar a un resultado.
- Ningún grupo realiza un proceso de validación. En el coloquio 3 no se necesita probar ninguna proposición o verificar hipótesis, por ende, los estudiantes no llevan a cabo estas actividades.

Heurística

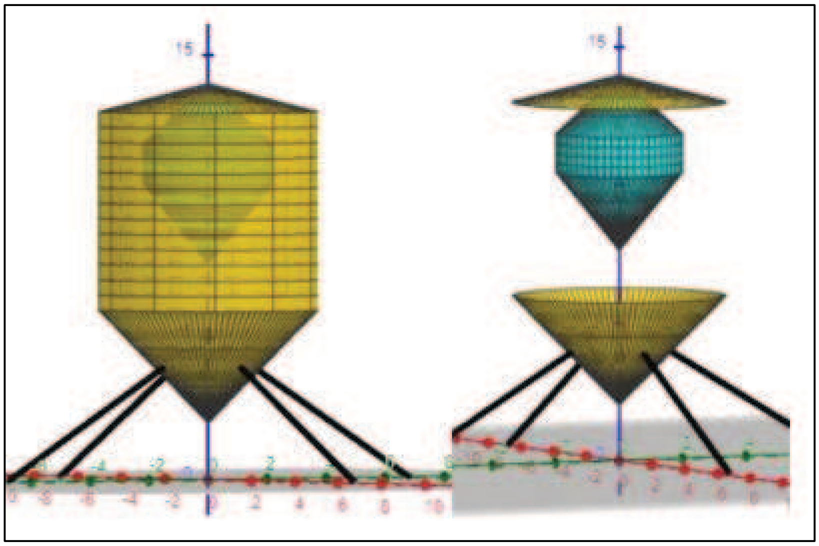
- El 100% identifica nexos y relaciones en el proceso de resolución del problema. Si bien en las producciones escritas entregadas previas a la exposición oral no se evidenciaron nexos de las resoluciones con el problema, en la presentación oral todos los grupos establecen una conexión entre los pasos realizados y el problema.
- El 25% de los grupos razona por analogía (G4 y G5). Logran razonar sobre el problema utilizando ejercicios resueltos en clases e identificando que su resolución es similar a los ejercicios vistos con anterioridad, lo expresan en la exposición oral.
- Ningún grupo simplifica el problema, ya que la consigna planteada es clara y directa y los estudiantes no ven la necesidad de simplificarla.
- El 100% de los grupos divide el problema en subproblemas. La consigna podía dividirse en dos subconsignas disjuntas entre sí, facilitando la resolución del problema.
- Ningún grupo introdujo un elemento auxiliar o analiza sistemáticamente casos o casos límites. La consigna no es lo suficientemente abierta para que los estudiantes buscaran casos especiales o límites.
- Solo un grupo (el 13%, G2) analiza un ejemplo para explorar el problema.
- Solo el 13% explora dos vías de soluciones diferentes. La consigna no especificaba que debían buscar otras vías de solución, por ende, los estudiantes no vieron la necesidad de hacerlo.

Metacognición

- El 50% de los grupos organiza el conocimiento y los conceptos que utilizarán a lo largo de la resolución.
- El 38% verifica las respuestas obtenidas utilizando otro registro de representación distinto de aquel en que se produjo la respuesta. Realizan una conversión entre la notación simbólica matemática y las representaciones visuales del silo. Grafican el silo y la mezcladora para verificar que cumpla con la consigna. A modo de ejemplo se muestra la Figura 20 que realiza el G5.

Figura 20

Gráfica para verificar las respuestas obtenidas



- Ningún grupo verifica usando casos particulares para comprobar si llegan a algún error o contradicción.
- El 100% manifiesta, en las encuestas realizadas luego del coloquio, que verifica la coherencia de las respuestas. Por ejemplo, afirman que compararon sus respuestas con el cálculo del volumen del cono y cilindro que conocen desde el secundario y que les dio parecido.
- El 100% de los grupos realiza explicaciones de los pasos seguidos durante el proceso de resolución. Hacen una pequeña narrativa donde justifican o explican las decisiones tomadas durante la resolución del problema. A modo de ejemplo se incluye una narrativa del G3:

  Suponiendo que la mezcladora para mezclar los granos debe girar (ya que desconocemos el verdadero funcionamiento) lo que decidimos fue colocarla en la parte inferior con 5 alambres de acero SAE 1045 de 1 [cm^2] de área, el cual posee una tensión admisible superior a los 2400 [kg/cm^2], con un solo cable en realidad estaría cubierta la necesidad, pero colocamos 5 para lograr la mejor estabilidad posible además que estaremos teniendo precauciones a futuro por alguna posible rotura u oxidación de los mismo, en la unión de los alambres con la mezcladora se encuentran rodamientos que permiten el libre giro de la misma y así evitamos que los alambres se enrollen entre sí con el movimiento. (Producción escrita de G3)

- El 100% reflexiona acerca de la vía de solución. En las encuestas manifiestan que hubo discusiones entre los diferentes integrantes de cada grupo sobre cuál era la vía de solución y qué camino seguir.
- Solo el 13% identifica (G2) que podía haber varias vías de solución.
- El 50% de los grupos identifica fortalezas y debilidades durante la resolución del problema (G1, G3, G5 y G8) A modo de ejemplo, se incluye en la Figura 21 la respuesta de G1, en la que se observa que el grupo es consciente de sus debilidades y fortalezas en la resolución del problema.

Figura 21

Narrativa del G1

> Tuvimos inconvenientes con la posición del silo y los ejes coordenados, ya que una parte del mismo era negativo, entonces para poder calcular el volumen total con integrales triples, decidimos desplazar el silo hacia arriba.

3.4.4. Análisis de las producciones orales y escritas del coloquio 4

Análisis de las producciones del Grupo 1

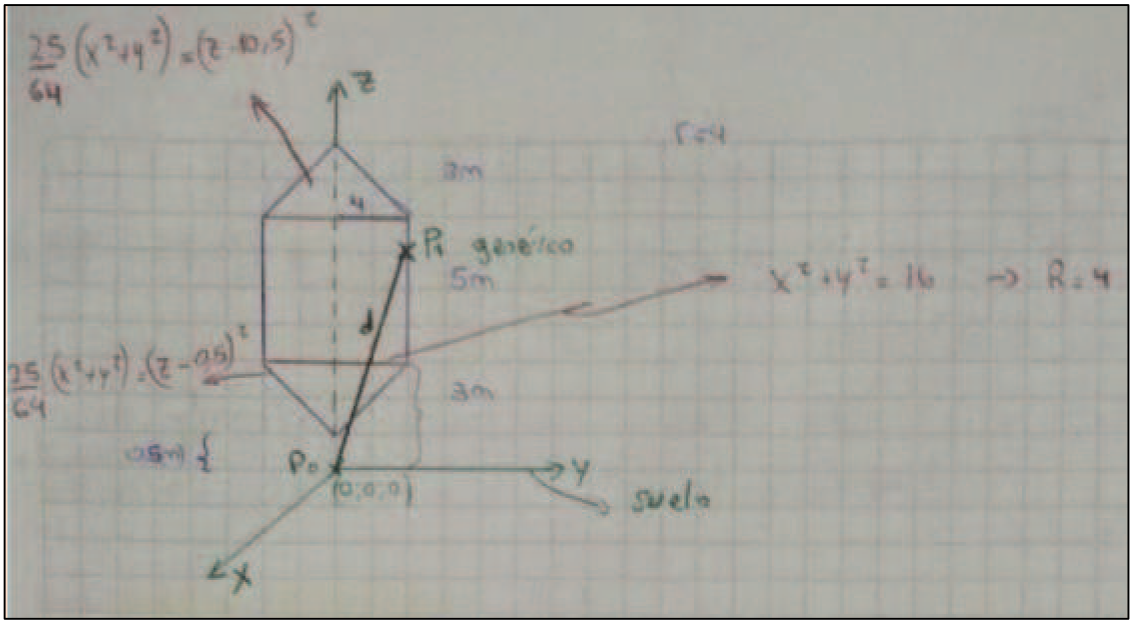
La resolución correspondiente al cuarto coloquio del Grupo 1 se encuentra en el siguiente link, que figura también en el Anexo N° 4: https://drive.google.com/file/d/1YrkgAkiz5Ohgf1wkQ3G15wXxz7mYGd2m/view?usp=sharing. A continuación, se describe la misma a partir de las dimensiones del pensamiento matemático (Díaz Lozada, 2018) consideradas en este trabajo.

Razonamiento Lógico- Matemático

- Recurren a la teoría relacionada para calcular el área de una superficie dada en ecuaciones paramétricas. También para hallar la función vectorial correspondiente al flujo del calor, cuando utilizan el teorema de la divergencia para facilitar el cálculo de las integrales de flujo.
- Realizan un gráfico para comprender mejor el problema. Grafican el silo y un segmento de recta que une el punto más cercano del suelo al silo con un punto genérico para expresar la función temperatura (ver Figura 22).

Figura 22

Gráfico de G1 para determinar la función temperatura.



- Reinterpretan el problema, pasando del lenguaje coloquial al lenguaje simbólico matemático (lo cual constituye una conversión en el sentido de Duval, 2016).
- Argumentan la utilización de la fórmula del cálculo del área de una superficie cuando, en la exposición oral, afirman que las superficies son uniformes. Verifican que el rotor del campo peso es nulo para justificar que el campo es conservativo.
- Realizan cadenas de razonamientos lógicos, por ejemplo, cuando calculan el campo vectorial que es la fuerza peso. Cuando observan que el campo es constante, justifican que al tratarse de un campo conservativo deben determinar una función potencial para utilizar el teorema fundamental de las integrales de línea para hallar el trabajo del insecto al moverse por el borde de la pintura.

Heurística

- Relacionan el proceso de resolución con el contexto del problema, por ejemplo, en la exposición oral comentan que cuando hallan las ecuaciones paramétricas del helicoide afirman que en el interior debe haber un cilindro que sirva de eje para la rotación del tornillo sin fin y para que no se caigan los granos cuando se los está trasladando.

- Simplifican el problema al quitar las raíces en el denominador del campo vectorial asociada al flujo del calor para simplificar las cuentas de la integral triple de la divergencia.
- Utilizan el teorema de la divergencia porque resulta más fácil calcular una integral triple que tres integrales de flujo de las superficies del silo.

Metacognición

- Organizan la información de los coloquios anteriores que luego utilizan para resolver el trabajo de la fuerza peso sobre un insecto.
- Verifican la solución utilizando una gráfica para comprobar que la construcción del tornillo sin fin cumpla con la consigna.
- Controlan la ejecución de la vía de solución al expresar en la exposición oral que al graficar el helicoide notan que está muy estirado el tornillo sin fin y no podrá trasladar los granos, y por eso toman la decisión de comprimirlo para que pueda transportar mejor los granos.
- Identifican fortalezas y debilidades, cuando afirman en la exposición oral que tuvieron un pequeño inconveniente con la función temperatura. También intentan resolver las integrales triples cambiando de coordenadas, pero afirman que no lograron completar esa estrategia de resolución.

Análisis de las producciones del Grupo 2

La resolución correspondiente al cuarto coloquio del Grupo 2 se incluye en el siguiente link, que también figura en el Anexo N° 4: https://drive.google.com/file/d/1B6nDha5pnYNgyuYq-HGbth1FX-1MVa6M/view?usp=sharing. A continuación, se describe la misma a partir de las dimensiones del pensamiento matemático (Díaz Lozada, 2018) consideradas en este trabajo.

Razonamiento Lógico- Matemático

- Recurren a la teoría relacionada cuando plantean las ecuaciones paramétricas de una hélice. También cuando aplican el teorema de la divergencia para calcular el flujo del calor, en la función vectorial correspondiente al flujo del calor y el cálculo de una integral de línea de un campo vectorial.

- Para comprender mejor el funcionamiento de tornillo sin fin grafican el helicoide dentro de un cilindro. Esto les permite saber cuáles son las superficies involucradas para el posterior cálculo del área.
- Reinterpretan el problema, pasando del lenguaje coloquial al lenguaje simbólico matemático (conversión en el sentido de Duval, 2016).
- Realizan un buen tratamiento (Duval, 2016) de las ecuaciones matemáticas para calcular la divergencia del gradiente de la temperatura.
- Realizan cadenas de razonamientos lógico para calcular el área del helicoide proponiendo calcular la longitud de la curva que rodea a la superficie y multiplicándola por el radio.

Heurística

- Relacionan el proceso de resolución con el contexto del problema, por ejemplo, cuando realizan una pequeña descripción de cómo trabaja un tornillo sin fin y por qué es útil. Afirman: "*Se decidió este tipo de transportador ya que toma los granos de la parte inferior, sin dejar sobras dentro del silo y las lleva por medio del sistema de tornillo sin fin, al camión, sin tener desperdicios del producto*". (Producción escrita del G2)
- Simplifican el problema para calcular el área de un helicoide calculando la longitud de la hélice que bordea al helicoide y multiplicándolo por su radio. Afirman en la exposición oral: "*nosotros pensamos que si lo desenrollábamos al helicoide nos queda un rectángulo de base la longitud de arco de la hélice y el radio como la altura*". Para calcular el área lateral del cilindro aplican la fórmula $2\pi rh$.
- Utilizan el teorema de la divergencia porque resulta más fácil calcular una integral triple que tres integrales de flujo de las superficies del silo.
- Utilizan energía potencial para calcular el trabajo del insecto al moverse sobre la curva. Utilizan conocimientos de física para encontrar otra vía de solución.

Metacognición

- Organizan la información de los coloquios anteriores que luego utilizan para resolver el trabajo de la fuerza peso sobre un insecto.
- Verifican la solución obtenida en el cálculo del trabajo del insecto utilizando conocimientos de física al calcular la energía potencial. Para ello multiplican la masa por la gravedad por la altura inicial menos la final y llegan al mismo resultado (ver

Figura 23). No verifican que el campo es conservativo para que se satisfaga dicha igualdad. Identificándola como otra vía de solución.

Figura 23

Verificación usando conocimientos de física

$$W = \int_a^b F(r(t)).r'(t)dt$$

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -mg.\left(-\frac{25}{6}\cos(t)\,sen(t)\right)dt$$

$$W = mg\frac{25}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}.(\cos(t)\,sen(t))dt$$

$$W = mg\frac{25}{6}\frac{1}{2} = 8{,}175\,.\,10^{-6}\,J$$

Verificación:

$$W = \Delta EP = EPf - EPi$$

$$W = mg(hf - hi)$$

$$W = mg(10{,}75 - 8{,}67)$$

$$W = 8{,}17\,.\,10^{-6}\,J$$

- Toman conciencia de los pasos realizados haciendo explicaciones en el proceso de resolución tanto en la presentación escrita como en la presentación oral.
- Reflexionan acerca de la vía de solución cuando la docente en la exposición oral les señala un error en los extremos de integración de la integral triple de la divergencia. Los estudiantes se dan cuenta del error y explican cómo lo escribirían de forma correcta.
- Reconocen, en la presentación oral, debilidades para comprender lo que pedía el enunciado cuando solicitaba que decidan si se debía o no vaciar el silo para que no se pierda la producción.

Conclusiones generales de todos los grupos del coloquio 4

En la tabla 6 se sintetizan los descriptores observados en las resoluciones de los ocho grupos correspondientes al coloquio 4. Posteriormente se presenta una descripción de las respuestas organizadas en torno a las distintas dimensiones del pensamiento matemático.

Tabla 6

Resumen del coloquio 4

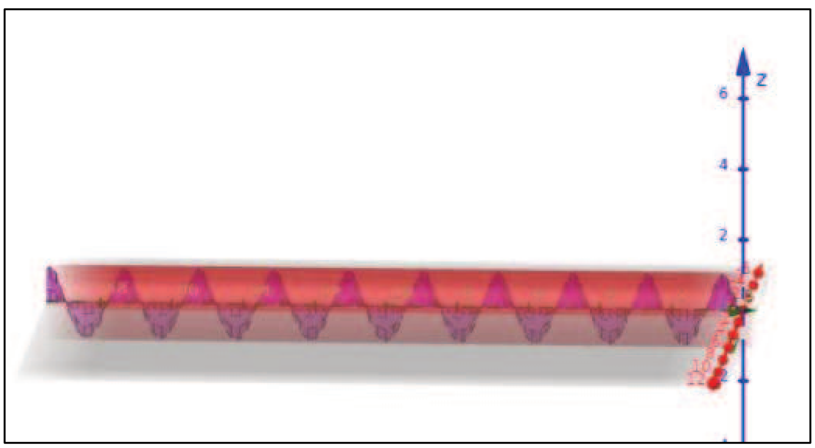
Dimensiones del Pensamiento Matemático	Indicadores	Descriptores generales	g 1	g 2	g 3	g 4	g 5	g 6	g 7	g 8	%
Razonamiento Lógico-Deductivo	Aplicar conceptos y proposiciones	Recurrir a teoría relacionada	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Organizar y representar la información que brinda el problema	Realizar una gráfica	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
		Reinterpretar el problema en un lenguaje diferente	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Deducir consecuencias de los datos del problema	Realizar cadenas de razonamientos lógicos	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Argumentar y demostrar proposiciones	Realizar un proceso de validación	X		X						25%
Heurística	Identificar nexos y relaciones	Relacionar proceso de solución con el problema	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
		Razonar por analogía									0%
	Variar las condiciones iniciales del problema	Simplificar el problema	X	X							25%
		Dividir el problema en subproblemas	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
		Introducir un elemento auxiliar									0%
	Identificar casos particulares	Análisis sistemático de casos									0%
		Analizar casos límites o especiales									0%
		Analizar ejemplos									0%
	Explorar diferentes vías de solución	Buscar diferentes vías de solución		X							13%
Metacognición	Organización del conocimiento	Organizar el conocimiento	X	X	X	X	X				63%
	Verificación de la solución obtenida	Verificar utilizando distintos registros de representación	X	X	X	X	X	X		X	88%
		Verificar utilizando casos particulares									0%
		Verificar si la respuesta es viable	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Controlar la ejecución de la vía de solución	Tomar conciencia de los pasos realizados	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
	Reflexionar acerca de la vía de solución	Reflexionar acerca de la vía de solución.	X	X	X	X	X			X	75%
	Identificar alternativas de vías de solución	Identificar varias vías de solución.		X							13%
	Identificar fortalezas y debilidades	Identificar fortalezas y debilidades	X	X	X	X	X	X	X	X	100%

Razonamiento lógico-deductivo

- El 100% de los grupos recurre a la teoría relacionada. Utilizan conceptos trabajados en clases como superficie dada en forma paramétrica, área de una superficie, integrales de superficies y el teorema de la Divergencia.
- El 100% realiza una gráfica para entender mejor el problema, lo cual supone una conversión (Duval, 2016). Con la ayuda de un software, en este caso el GeoGebra, los estudiantes construyen la gráfica del helicoide (tornillo sin fin) para ver la ubicación del mismo. Otros grupos grafican el silo y la distancia de un punto genérico hacia el punto en el suelo para obtener la función distancia. A modo de ejemplo, se incluye en la Figura 24 la gráfica del helicoide junto con el cilindro que la contiene del G4.

Figura 24

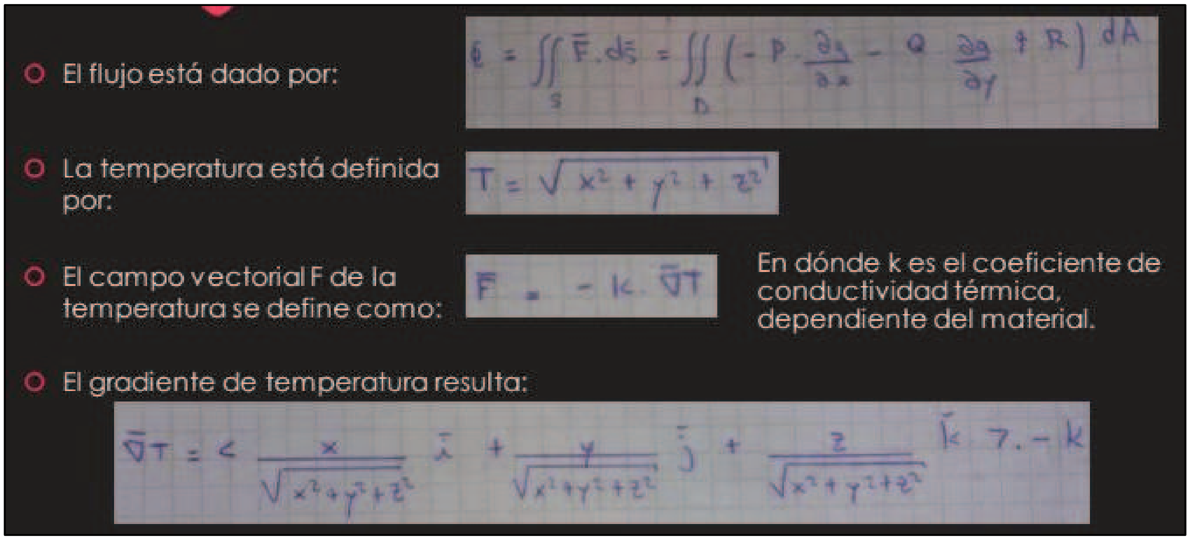
Gráfica del tornillo sin fin del G4



- El 100% reinterpreta el problema en un lenguaje diferente. Las consignas se presentan en lenguaje coloquial y los estudiantes convierten (Duval, 2016) la representación semiótica utilizando la notación simbólica matemática.
- El 100% realiza cadenas de razonamientos lógicos. Logran interpretar el problema, llevarlo a un lenguaje simbólico matemático y hacer un buen tratamiento (Duval, 2016) de las fórmulas implicadas hasta llegar a un resultado. A modo de ejemplo, se incluye Figura 25 la conversión de un registro semiótico a otro del G7.

Figura 25

Conversión de registros semióticos del G7



- Solo el 25% (G1 y G3) verifica las hipótesis antes de aplicar el teorema de la divergencia.

Heurística

- El 100% identifica nexos y relaciones en el proceso de resolución del problema. En las presentaciones tanto escrita como oral todos los grupos establecen conexiones entre los pasos realizados y el contexto del problema.
- Ningún grupo razona por analogía.
- Ningún grupo simplifica el problema, esto podría ser porque la consigna les resulta clara y directa.
- El 100% de los grupos divide el problema en subproblemas. La consigna podía dividirse en tres subconsignas disjuntas entre sí, facilitando la resolución del problema.
- Ningún grupo introduce un elemento auxiliar, analiza sistemáticamente casos o casos límite o analiza ejemplos. La consigna no resulta lo suficientemente abierta para que los estudiantes busquen casos especiales o límites.
- Solo el 13% (G2) explora dos vías de soluciones diferentes. Un grupo calcula el trabajo del insecto de dos formas diferentes (ver Figura 22).

Metacognición

- El 63% de los grupos organiza el conocimiento y los conceptos que utiliza a lo largo de la resolución. Los grupos realizan una lista con los datos que tienen del problema y las fórmulas usadas en la resolución.
- El 88% verifica las respuestas obtenidas utilizando otro registro de representación distinto de aquel en que se produce la respuesta. Hacen una conversión entre la notación simbólica matemática y las representaciones visuales del helicoide y los cilindros parabólicos, para verificar que cumpla con la consigna.
- Ningún grupo verifica usando casos particulares para ver si no llegan a algún error o contradicción.
- El 100% de los estudiantes manifiesta en las encuestas realizadas luego del coloquio, que verifica la coherencia de las respuestas.
- El 100% de los grupos realiza explicaciones de los pasos seguidos durante el proceso de resolución. Hacen una pequeña narrativa donde justifican o explican el porqué de las decisiones tomadas.
- El 75% reflexiona acerca de la vía de solución. En las encuestas manifiestan que hubo discusiones entre los diferentes integrantes de cada grupo sobre cuál era la vía de solución y qué camino seguir.
- El 13% afirma que podía haber varias vías de solución.
- El 100% de los grupos identifica fortalezas y debilidades durante la resolución del problema. Durante la presentación oral describen las dificultades que tuvieron durante la resolución del problema.

3.4.5. Conclusiones generales de los coloquios

Se observa que la dimensión más desarrollada dentro del pensamiento matemático es la del razonamiento lógico deductivo. Luego le sigue la metacognición y por último la heurística. Se conjetura que este resultado obedece a que en la formación inicial del ingeniero en la FRSF se prioriza más el razonamiento lógico-deductivo que las restantes dimensiones.

Durante el cursado de AMII, tanto en las clases teóricas como prácticas no se generan actividades en la que los estudiantes puedan desarrollar las diferentes estrategias heurísticas ni actividad metacognitiva. Desde la cátedra se alienta a los estudiantes a buscar varias vías de solución y a que realicen actividades metacognitivas. Como destaca Díaz Lozada (2018) para desarrollar el pensamiento matemático es importante que el estudiante reflexione sobre su propia actividad cognitiva.

El 75% no verifica hipótesis antes de utilizar un teorema. El problema radica en que desde la cátedra de AMII no se los estimula a argumentar o verificar hipótesis, muchas veces basta con que sepan aplicar bien el teorema o la fórmula. En clases o en los exámenes no se les exige a los estudiantes una prueba o demostración con rigor matemático. Esta situación se reprodujo en los cuatro coloquios.

Las consignas de los coloquios permiten dividir el problema en subproblemas más sencillos de resolver. Lo manifestado por los estudiantes en las encuestas, es que a la hora de la resolución se dividieron el problema de modo que cada uno debía resolver una parte y luego se compartieron las resoluciones entre los tres integrantes del grupo, con el fin de revisar si las mismas eran adecuadas. Esta estrategia de abordaje, en cierto modo, obtura la posibilidad de que se implemente este heurístico.

El hecho de que la mayoría de los grupos no plantea vías de resolución diferentes se interpreta como la falta de costumbre para hacerlo. Una vez que llegan a la solución no buscan otra, se quedan con la que obtuvieron. Tampoco ven la necesidad de hallarla, ya que durante el cursado de la asignatura no se exige proponer resoluciones diferentes para una misma situación problemática. Esto se vincula con la creencia sobre la matemática (Schoenfeld, 1992) respecto de que existe una única vía de solución. La misma se refuerza también por el hecho de que el libro de texto utilizado por la cátedra (Stewart, 2008) propone ejemplos y ejercitación cerrados, que poseen una sola respuesta, sin la posibilidad de explorar diferentes alternativas y quitando la posibilidad de reflexionar acerca de cuál resultado es más conveniente.

Otra de las creencias planteadas por Schoenfeld (2012) que se ven reflejadas en las respuestas de los coloquios es que los problemas se resuelven rápido. Los estudiantes manifiestan que le dedican poco tiempo a la resolución de los mismo porque piensan que se resuelven rápido. El S1,2 afirma que una debilidad del trabajo en grupo es "*los tiempos de cada integrante a la hora de empezar a resolver*".

3.5. Análisis de las respuestas a las encuestas

Las consigas metacognitivas apuntan a la reflexión y autoevaluación sobre el propio desempeño durante la resolución de una consigna matemática. Con el fin de obtener información sobre estas cuestiones, se administra un cuestionario individual (ver Tabla 1 del Anexo 1) mediante Google Forms (https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSfiqU54pEtbRP09srsNSzs94WK7IIRV0KnKQKF11S8GHhAvcA/viewform?usp=sharing), que los estudiantes deben responder de modo obligatorio al finalizar la instancia oral de cada coloquio. El cuestionario permaneció invariante durante los cuatro coloquios. Solo un estudiante no realizó la encuesta N°4 porque abandonó la asignatura.

En la tabla 7 se muestran los porcentajes de respuestas de los estudiantes a las cinco primeras preguntas que apuntan a una reflexión metacognitiva de cada estudiante.

Tabla 7

Respuestas de las encuestas

	Pregunta	Encuesta 1		Encuesta 2		Encuesta 3		Encuesta 4	
1	¿Pudiste resolver el problema con los conocimientos que tenías?	**Si:** 100%		**Si:** 96%		**Si:** 100%		**Si:** 96%	
		No: 0%		**No:** 4%		**No:** 0%		**No:** 4%	
2	¿Entendiste lo que se pedía desde la primera vez que leíste el problema?	**Si:** 33%		**Si:** 42%		**Si:** 67%		**Si:** 48%	
		No: 67%		**No:** 58%		**No:** 33%		**No:** 52%	
3	¿Pudiste encontrar una vía de solución rápido?	**Si:** 75%		**Si:** 67%		**Si:** 75%		**Si:** 70%	
		No: 25%	**Si:** 100%	**No:** 33%	**Si:** 75%	**No:** 25%	**Si:**100%	**No:** 30%	**Si:** 86%
			No: 0%		**No:** 25%		**No:** 0%		**No:**14%
4	¿Te hiciste autopreguntas sobre el problema?	**Si:** 79%		**Si:** 75%		**Si:** 83%		**Si:** 48%	
		No: 21%	**Si:** 60%	**No:** 25%	**Si:** 67%	**No:** 17%	**Si:**100%	**No:** 52%	**Si:** 83%
			No: 40%		**No:** 33%		**No:** 0%		**No:**17%
5	¿Pensaste si la solución responde lo que se te pide y si tiene coherencia con el problema?	**Si:** 96%		**Si:** 100%		**Si:** 96%		**Si:** 91%	
		No: 4%	**Si:** 100%	**No:** 0%	**Si:**	**No:** 4%	**Si:**100%	**No:** 9%	**Si:** 100%
			No: 0%		**No:**		**No:** 0%		**No:** 0%

La primera pregunta de la encuesta es una consigna metacognitiva matemática (Rodríguez, 2017) ya que apunta a que el estudiante reconozca con qué recursos o conocimientos contaba en el momento de resolver cada coloquio. Esta pregunta estimula al estudiante a reflexionar en torno a cuál es el abordaje apropiado o la mejor estrategia para resolver el problema con los conocimientos que posee.

El 98% de los estudiantes logra resolver los coloquios con los conocimientos que tienen al momento del coloquio. Afirman que con los conceptos dados en clases más los conocimientos que traían de otras asignaturas pudieron resolver el problema.

Por ejemplo, el S3,5 afirma: "*usé conocimientos de álgebra, análisis 1 y también lo que aprendimos en esta primera etapa de la materia, como ser la integral de línea, parametrización, entre otros*". Se puede notar que el estudiante no solo utilizó conocimientos propios de la asignatura AMII sino también de las dos asignaturas correlativas de AMII.

Por otro lado, el S1,3 afirma que fueron claves para la resolución los "*conocimientos teóricos propios de la catedra y también razonamientos en base a la carrera que estoy estudiando (ing. civil) en cuanto a pensamientos de estructuras y sostén*". Se evidencia que reconoce la necesidad de usar conocimientos relacionados con otras asignaturas específicas de la carrera Ingeniería Civil para comprender y resolver el problema.

La segunda pregunta de la encuesta es una consigna metacognitiva personal (Rodríguez, 2017) ya que apunta a que el estudiante reconozca si la actividad le resultó fácil o no y si advirtió tener algún bloqueo. Cuando un problema está bien planteado, el estudiante debe tener algún bloqueo inicial para que sea un problema y no un ejercicio (Came López, 2016). El hecho de que el estudiante tome conciencia de ese bloqueo inicial genera una reflexión metacognitiva. En promedio entre los cuatro coloquios, el 52,5% de los estudiantes advirtió el bloqueo inicial.

Como afirma S1,2:

> *Al principio no entendí como sacar la altura y el radio del silo, por ende, lo planteé de forma genérica, pero luego de resolverlo de esta forma, decidí utilizar la escala de 1 metro para aproximar las dimensiones del silo y así me di cuenta que era la forma correcta de resolverlo*.

Gran parte de los estudiantes afirman no saber cómo obtener las medidas del silo, hasta que se dieron cuenta de la escala incluida en la fotografía.

Por otra parte, el S3,3 afirma: "*No pensé nada en específico, pero cada vez que lo leía más detenidamente lo iba interpretando mejor hasta llegar a darme cuenta que no era* *tan difícil de resolver*". El estudiante advierte el bloqueo inicial y reconoce que debió leer varias veces y con detenimiento el enunciado hasta, según afirma, ver que no era tan difícil. En este caso el trabajo con otros compañeros de grupo ayudó a que interprete el problema, como lo afirma en otra pregunta de la encuesta. Acá se evidencia que la negociación con otros, la generación de espacios con fines e intereses comunes posibilita avances en la interpretación del problema por parte del estudiante, aspectos que pueden encuadrarse en el concepto de zona del desarrollo próximo (Vigotsky, 2007): el estudiante con la ayuda de los compañeros pudo avanzar más que si hubiese estado solo.

La tercera pregunta de la encuesta apunta a conocer si el estudiante advierte si le resultó fácil encontrar la vía de solución para los problemas de los coloquios. Esta consigna metacognitiva personal busca que el estudiante reflexione como se ve él frente a la tarea asignada, si se percibe como resolutor de problemas o no. El 72% de los estudiantes consideran que pudieron encontrar rápido la vía de solución.

El S2,2 afirma: "*Me resulto de una complejidad normal. Considero que fue así por el tener presentes los conceptos teóricos e ir volviendo sobre los conceptos y ejercicios resueltos.*" El estudiante advierte que al recurrir a los contenidos de la asignatura logra encontrar una vía de solución sin mayor dificultad.

Si en la tercera pregunta de la encuesta respondían que no encontraron rápido la vía de solución se les hacía otra pregunta con el objeto de determinar si el estudiante advierte que existen varias vías de solución. Esta es una consigna metacognitiva matemática porque está referido a las estrategias, en este caso heurísticas, de vislumbrar la existencia de diferentes vías de solución.

El S3,1 afirma: "*desistí porque las otras posibilidades me daban cosas absurdas o que no se podían resolver como por ejemplo un sistema de ecuaciones indeterminado*". El estudiante prueba otras vías de solución y al verificarlas no llega a algo lógico. Se queda con la opción más razonable y esto provoca, según Balacheff (2000), una experiencia crucial.

La cuarta pregunta del cuestionario es una consigna metacognitiva personal porque indaga sobre la propia reflexión del estudiante, si se hace cuestionamientos o planteos fuera de la consigna original. El 70% de los estudiantes afirma que se realiza auto-preguntas en torno al problema.

El S3,6 afirma:

> *Algunas preguntas que surgieron fueron referentes a los materiales para la construcción del primer inciso. Como por ejemplo ¿Qué pasaría si los materiales son muy pesados? ¿Se necesitaría un soporte? ¿Cuál sería la posición correcta del transportador? ¿La posición de la misma nos acarrea algún cambio en los cálculos? En definitiva, cada pregunta creo que nos hizo establecer un criterio y seguirlo para la resolución de los incisos.*

El estudiante va más allá de la consigna original, se plantea cuestiones pertinentes como el tipo de material utilizado o la ubicación del tornillo sin fin, haciendo una metacognición de la consigna más profunda. Esta pregunta del cuestionario pone en evidencia reflexiones metacognitivas que permiten indagar si los estudiantes se plantean ciertos cuestionamientos o solo resuelven mecánicamente.

Del 30% de los estudiantes que no se realizaron auto-preguntas, solo el 23% no se realiza cuestionamientos habitualmente. El S1,4 afirma que las auto-preguntas "*son muy necesarias, pero habitualmente no estamos acostumbrados a cuestionarnos las resoluciones y por eso somos más propensos a cometer errores al momento de resolver ejercicios*". El estudiante reconoce la importancia y la necesidad de auto-cuestionarse e incluso en otro coloquio el mismo estudiante justifica por qué no se realiza preguntas. Afirma: "*Considero que son necesarias, pero muchas veces corremos a contratiempo por diversas razones. Lo que no te lleva a detenerte para procesar y evaluar diferentes alternativas*".

La quinta pregunta es una consigna metacognitiva matemática porque hace foco en la situación del problema. Esta pregunta busca que el estudiante constate, con algún proceso de verificación, que las respuestas tengan coherencia con el problema. Pretende que el estudiante reflexione sobre la respuesta encontrada y si es viable la solución hallada según el contexto del problema dado.

En la práctica docente, es bastante habitual que los estudiantes, una vez llegado al resultado final de un ejercicio o problema, lo remarcan o destacan de algún modo y luego siguen con otro ejercicio sin reflexionar sobre la pertinencia de la solución alcanzada (Schoenfeld,1992). Por ejemplo, cuando se debe calcular el área de una región usando una integral definida y el resultado es negativo, es posible que no adviertan que el mismo no tiene sentido.

El 96% de los estudiantes verifica la coherencia de las respuestas halladas. Afirman que recurren a la representación gráfica con ese fin, que se interpreta como una conversión de registro de representación (Duval, 2016). Se valen de GeoGebra para graficar las diferentes superficies, las curvas, los tensores, la mezcladora y el tornillo sin fin transportador de granos. Como lo afirma S2,8: "*Lo que nos ayudó a verificar si los cálculos estaban correctos fue representarlos gráficamente, mediante GeoGebra, y ver si la función graficada era la que correspondía al ejercicio*".

Conclusiones Generales de las Encuestas

El cuestionario ha permitido recoger información sobre la metacognición de los estudiantes que difícilmente se hubiese podido obtener en las entregas escritas o en la presentación oral. Se obtuvo información acerca de cómo les resultó resolver los problemas y se logró una aproximación al trabajo metacognitivo de cada estudiante: si la actividad les resultó fácil o difícil, si hubo bloqueo inicial, si se auto-cuestionan, cuáles fueron las estrategias utilizadas para resolver los problemas, entre otras.

El docente estimula a los estudiantes a la reflexión sobre su desempeño cognitivo en la resolución de problemas, pero muchas veces, como lo manifiestan los estudiantes en las encuestas, la falta de tiempo hace que solo resuelvan el problema y sigan con otra actividad. Al tratarse de una asignatura cuatrimestral los tiempos de cursado y evaluación se aceleran. Esta situación se agrava por el hecho de dictarse en el segundo cuatrimestre, puesto que a fin de año tienen que rendir otras asignaturas lo que hace que el tiempo dedicado a AMII no sea suficiente.

Como afirma S1,7: "*no resultaron fácil las vías de solución ya que en este caso tomamos las primeras encontradas, las cuales resultaron un poco tediosas. No usamos otras vías de solución por falta de disponibilidad de tiempo* ". El estudiante reconoce que se quedaron con la primera vía de solución pensada sin explorar otras por falta de tiempo. Este testimonio se repitió en muchas ocasiones a lo largo de los cuatro coloquios.

3.6. Proceso de Validación de los Estudiantes

Muchas veces se pretende que cuando un estudiante se enfrenta a la resolución de un problema lo haga como un matemático, es decir, que contemple el problema desde distintas perspectivas, que construya una cadena de razonamientos y que valide cada uno de los eslabones que conforman la resolución (Balacheff, 2000). Una vez que se llega a la solución, se espera que la verifiquen. Pero la realidad es que los estudiantes intentan resolver el problema y una vez alcanzada una solución, no es habitual que exploren otra vía de solución.

En esta experiencia se trabajó en grupos de tres integrantes, entonces si cada estudiante trabajaba por separado podrían haber surgido diferentes vías de solución dentro del grupo. Sin embargo, en muchos casos no se respetó la indicación inicial respecto de que todos los integrantes del grupo debían pensar todas las consignas y luego discutir la vía de solución a tomar. La realidad fue que se dividieron el problema en subproblemas y cada uno resolvió la parte que le correspondía.

Como afirma Schoenfeld (1992) en ocasiones, cuando los estudiantes se enfrentan a un problema y creen saber cómo se resuelve, siguen adelante, aunque se les dificulten las cuentas o no lleguen a nada. Se empecinan en seguir ese camino que luego de batallar llegan a la respuesta o se hunden en un pantano de incertidumbre que los llevan a desistir de seguir en la búsqueda de la resolución del problema.

Uno de los objetivos de esta secuencia de problemas es que los estudiantes tomen conciencia del proceso de validación y su aplicación en el futuro. Es importante que se den cuenta que al formular una conjetura o conclusión esta debe venir acompañada de una justificación, argumentación o validación pertinente. Como ingenieros en formación deben tener desarrollada la capacidad para argumentar y validar sus decisiones, mediante pruebas que validen su trabajo.

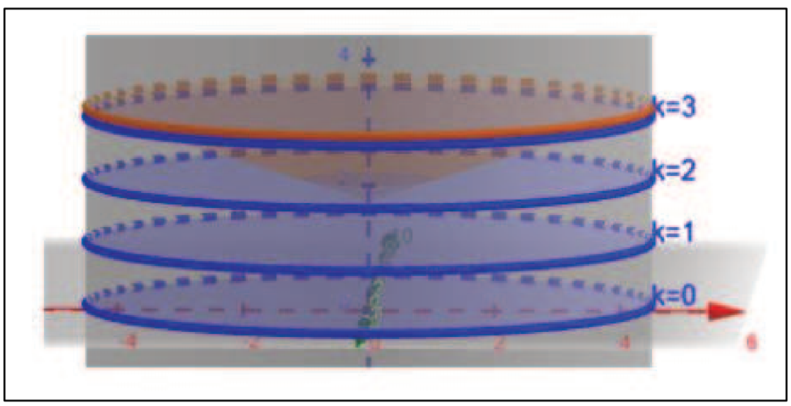
Actualmente, en la asignatura AM II la demostración no es objeto de enseñanza. La demostración sirve como herramienta de prueba de algunos teoremas enunciados en clases o pruebas de proposiciones verdaderas. Algunas reglas o conceptos se desarrollan siguiendo un razonamiento deductivo hasta la formulación de la misma. Si bien el proceso de validación está dentro de la formalidad de la matemática, a la hora de evaluarlo no se exige tanto.

Está claro que el nivel de los procesos de validación depende de la relación que tiene el estudiante con los conocimientos, el contexto, la experiencia validando y el compromiso. Actualmente, en la FRSF ese proceso de validación no es propio de los estudiantes. Muchas veces actúan de manera mecánico o resuelven los ejercicios de forma algorítmica sin justificar su accionar. Por ejemplo, en el coloquio 4, donde los estudiantes aplican el teorema de la divergencia solo el 25% de los grupos verificó que se cumplan las hipótesis antes de utilizarlo.

En la resolución de los coloquios, la interacción social fue un motor para la validación, puesto que los estudiantes defendían sus estrategias de resolución frente a sus compañeros dando una breve explicación de las mismas. En las encuestas los estudiantes manifestaron que luego de una discusión grupal se tomaba una decisión común. Este proceso de validación social puede provocar un empiricismo ingenuo (Balacheff, 2000), aceptando lo que el compañero propone, que no es necesariamente correcto. Por ejemplo, en el coloquio 2 el grupo 6 debían decidir dónde colocar aros de refuerzo sobre la superficie cónica. Afirman que: "*En la imagen dibujamos el cono inferior (naranja) y algunas circunferencias (azul) que rodean al tronco del cono inferior del silo*". Presentan la Figura 26.

Figura 26

Gráfico presentado por G6

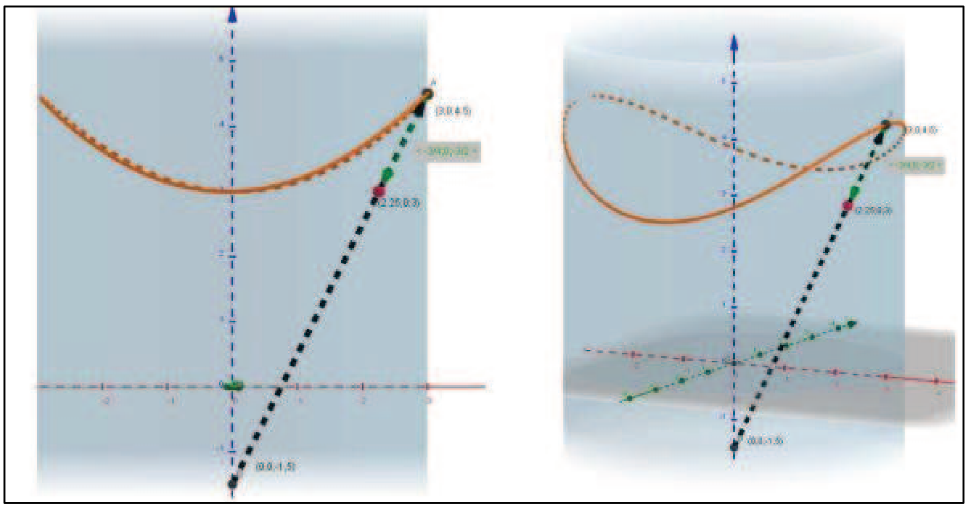


Gráficamente se puede observar que no cumple con la consigna de que los aros circulares se sitúen sobre la superficie cónica. Es posible que este modo de validación, que se considera como una prueba del tipo empiricismo ingenuo, haya impedido alcanzar una respuesta coherente.

En ocasiones, la falta de contradicciones en una aseveración sirve como proceso de prueba, aunque no asegura la validez de esta. Puede suceder que "tal contradicción será reconocida por el profesor en una situación experimental, pero no podrá ser reconocida por el estudiante" (Balacheff, 2000, p. 34). Esta ausencia se debe a la naturaleza de los conocimientos de los estudiantes. El objetivo del docente es generar la oportunidad para que el estudiante advierta por sí mismo la contradicción y encuentre una explicación. Una vez identificada la contradicción, la superación requiere un trabajo de reflexión de parte de los estudiantes, que deben hacer uso de los conocimientos involucrados. Por ejemplo, en el coloquio 2 el G8 debía decidir hacia donde se movía un insecto que estaba en el exterior del silo para alcanzar una temperatura óptima. Los estudiantes realizaron los cálculos y obtienen un vector cuya dirección y sentido conducen al interior del silo. Presentaron la Figura 27.

Figura 27

Gráfica presentada por G8



El docente, en la presentación oral, les advierte sobre el error porque el insecto no puede atravesar la pared lateral del silo. Este es otro ejemplo en el que la respuesta inadecuada se advierte mediante un razonamiento de tipo empiricismo ingenuo, dado que se manifiesta el error en la representación gráfica de la situación.

CAPÍTULO 4: Conclusiones

A continuación se presentan las conclusiones finales de esta investigación. Se realiza una breve descripción de las conclusiones a partir de cada objetivo específico. También se realiza un análisis de futuras líneas de investigaciones.

4.1. Consecución de los objetivos

El objetivo general que se plantea en esta tesis es el siguiente:

Explorar potencialidades y limitaciones de una secuencia de problemas para promover el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de ingeniería de la FRSF-UTN.

Se diseña una secuencia de cuatro problemas con los que se espera promover el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de ingeniería a lo largo de un cuatrimestre, a partir de los indicadores propuestos para caracterizar el pensamiento matemático.

Se adopta una caracterización del pensamiento matemático que lo vincula con tres dimensiones: el razonamiento lógico-matemático, la heurística como recurso de búsqueda y la metacognición que permite valorar la actividad mental que se realiza (Díaz Lozada, 2018; Díaz Lozada y Díaz Fuentes, 2018). A la luz de los resultados obtenidos en esta secuencia se observa que, dentro de estas tres dimensiones, los estudiantes desarrollan en gran medida el razonamiento lógico deductivo y la metacognición, pero se observa una menor incidencia de las herramientas heurísticas en sus producciones.

Un resultado que se debe destacar de esta experiencia es que, si bien el estudio no tiene la finalidad de establecer comparaciones con resultados de los cursos anuales, hubo una notable mejora en la promoción de la asignatura. El 75% de los estudiantes obtuvieron la promoción directa de AMII con un promedio de 7,6 en la nota final.

Se pudo recoger información valiosa para la investigación de las producciones escritas entregada por los estudiantes, también de los videos de las exposiciones orales y de las encuestas. Esta información sirve para detectar, por medio de la Tabla 2, el desarrollo de las tres dimensiones del pensamiento matemático de los estudiantes.

Una limitación de la investigación es la falta de tiempo con que cuentan los alumnos. Los estudiantes afirman que no pueden dedicarle el tiempo suficiente a la asignatura porque deben rendir otras materias en un lapso de tiempo corto. La falta de tiempo para dedicarle a la asignatura de alguna manera influye en el pleno desarrollo de las herramientas heurísticas, ya que, tal como lo manifestaron en las encuestas, siguen con la primera decisión tomada. Y también la falta de tiempo para la reflexión sobre su propia actividad cognitiva, que es necesario para el proceso metacognitivo.

Otra limitación relacionada con los problemas diseñados, se vincula con algunas características que, a posteriori, se observan en la redacción de los enunciados. Por un lado, alguna consigna (en particular, la primera pregunta del primer coloquio) conduce a una respuesta única, que no da lugar a la exploración de diferentes vías de solución. Por otro lado, se considera que se deberían incluir en los enunciados indicaciones que generen la necesidad de recurrir a diferentes heurísticas, comparar y valorar las soluciones alcanzadas mediante distintas estrategias, discutir las estrategias pensada por cada estudiante, entre otras acciones. En la redacción de las consignas se debería pedir explícitamente buscar vías de solución diferentes o que realicen proceso de validación. También puede resultar viable solicitar en una primera etapa de la resolución la producción de respuestas individuales, para pasar en una segunda etapa al trabajo grupal, bajo consignas que requieran de parte de los estudiantes la selección de alguna solución que el grupo valore como óptima, dando las razones de esa elección.

Por último, otra cuestión que se vislumbra como interesante para seguir estudiando y mejorando, es la búsqueda de contextos extra-matemáticos de interés para el planteo de situaciones problemáticas pertinentes para el análisis de un ingeniero. En el caso de la asignatura AMII, que cursan en forma simultánea estudiantes de distintas ingenierías, este requisito se torna aún más complejo de cumplimentar. Además, las situaciones deben posibilitar la puesta en juego de tópicos matemáticos que se trabajan en el nivel universitario y en particular, en esta asignatura.

A continuación, se retoman los objetivos específicos que se plantean en esta tesis, con el fin de analizar las acciones que se llevaron a cabo para su consecución.

Objetivo específico 1. Diseñar, implementar y evaluar una secuencia de problemas propios de la Ingeniería para promover el desarrollo del pensamiento matemático.

Se diseña, implementa y evalúa una secuencia de problemas para promover el desarrollo del pensamiento matemático. Se selecciona un contexto extra-matemático, que se considera apropiado para el trabajo ingenieril, vinculado con la construcción y las características de los silos utilizados para el acopio de cereales. Se plantean consignas que permitan poner en juego distintas nociones de la asignatura AMII. Se realiza en tiempo y forma priorizando promover las tres dimensiones del pensamiento matemático durante la resolución de problemas aplicados, en la exposición oral y en las encuestas.

Gracias a la metodología de investigación-acción la docente-investigadora pudo desarrollar las clases siguiendo el cronograma estipulado y llevar a cabo esta investigación aprovechando las exposiciones orales para indagar y profundizar en el análisis de las tres dimensiones del pensamiento matemático.

Objetivo específico 2. Identificar evidencias del uso del razonamiento lógico-deductivo en las producciones de los estudiantes.

Se identifican indicadores que permiten poner en evidencia el uso del razonamiento lógico deductivo durante la resolución de los problemas. Estos indicadores se describen y caracterizan de modo que permitan ser utilizados en el análisis de las resoluciones e intervenciones de los estudiantes. Entre estos indicadores, en las producciones escritas y orales de los estudiantes su pudo observar que recurren a la teoría relacionada, enunciando y utilizando las definiciones y teoremas desarrollados en clases. Utilizan los conceptos desarrollados en la asignatura AMII para resolver los problemas aplicados.

Se observa que en todos los coloquios el 97% de los grupos cambia de registro de representación, es decir, recurre a la realización de una gráfica para comprender mejor el problema.

El 100% de los grupos traduce el problema de un lenguaje coloquial a un lenguaje simbólico matemático. Una vez que producen una expresión simbólica de la situación involucrada, se constata su manipulación (es decir, un tratamiento en término de Duval, 2016) para obtener las respuestas a las preguntas planteadas y la puesta en juego de cadenas de razonamientos lógicos.

Generalmente en la formación de un ingeniero, a los estudiantes no se les exige una prueba o argumentación de sus afirmaciones. Durante esta experiencia se puso en evidencia la presencia de procesos de validación (Balacheff, 2000) de los resultados alcanzados mediante pruebas de tipo empiricismo ingenuo (los estudiantes validan a partir de constataciones superficiales en un gráfico, por ejemplo) y se constataron limitaciones para realizar un proceso de validación en los estudiantes. Solo el 25% de los grupos realiza la prueba de proposiciones o la verificación de las hipótesis de los teoremas. Se conjetura que esto se da porque no es habitual que realicen dicho proceso de validación durante el cursado del ciclo básico.

Objetivo específico 3. Caracterizar los procesos heurísticos evidenciados en las estrategias implementadas por los estudiantes.

Dado el rol que juega la heurística en la resolución de problemas, se destaca el interés de esta tesis en observar las diferentes heurísticas puestas en juego a la hora de la resolución de los problemas (Polya, 1989). Con el fin de caracterizar los procesos heurísticos, en primer lugar se definieron y caracterizaron indicadores. En cuanto a las herramientas heurísticas desarrolladas, los estudiantes solo recurrieron a la división del problema en subproblemas y a relacionar el proceso de solución con el problema. Las demás heurísticas, como buscar diferentes vías de solución, análisis de casos o casos límite o especiales, entre otras, no son utilizadas.

Se ha señalado una posible limitación relacionada con los enunciados del problema y con la necesidad de requerir en las consignas algunos análisis que permitan poner en juego otras heurísticas. No obstante, como señalan Polya (1989) y Schoenfeld (1995), para que los estudiantes puedan adquirir habilidades en el uso de heurísticas se requiere que tengan la posibilidad de involucrarse en la resolución de problemas y de enfrentarse a situaciones en las que deban explorar diversas vías de solución, haciendo uso de conocimientos matemáticos. Se considera que la secuencia de problemas diseñada conforma un adecuado punto de partida para la promoción de este tipo de trabajo en la formación de los futuros ingenieros.

Objetivo específico 4. Describir los procesos de metacognición puestos en juego durante la resolución de los problemas.

Para cumplimentar este objetivo, en primer lugar se seleccionaron y describieron indicadores que permitan evidenciar la presencia de procesos de metacognición durante las acciones llevadas a cabo por los estudiantes para resolver los problemas de la secuencia. En segundo lugar, se elaboró un cuestionario con preguntas que apuntan a identificar reflexiones metacognitivas de tipo personal y también matemático (Rodríguez, 2017). Como resultados de estas acciones, se constata que los estudiantes toman conciencia de su propia actividad cognitiva. Dentro del proceso de metacognición los estudiantes organizan el conocimiento, verifican utilizando diferentes registros de representación, verifican la viabilidad de las respuestas, toman conciencia de los pasos realizados, reflexionan acerca de la vía de solución e identifican fortalezas y debilidades.

4.2. Futuras líneas de investigación

La presente tesis ha ampliado la caracterización propuesta por Díaz Lozada (2018) del pensamiento matemático. Se exploraron en profundidad las tres dimensiones del pensamiento matemático mediante la definición y caracterización de indicadores (Tabla 2) que permite identificarlas con claridad. Podrían usarse estos indicadores en nuevas investigaciones, para seguir explorando las tres dimensiones juntas o estudiarlas por separado.

En esta tesis se avanzó en la caracterización del concepto de zona de problematización, que ha quedado sin profundizar pues requeriría de otro tipo de abordaje desde el punto de vista investigativo. Esta definición esbozada abre futuras vías de indagación. La delimitación de dicha zona permite seguir estudiando en torno a la resolución de problemas en la formación de ingenieros, la redacción de las consignas y sobre todo el desarrollo del pensamiento matemático.

Otra posible línea futura de investigación tiene que ver con la dimensión vinculada con el razonamiento lógico-deductivo, en relación con el desarrollo de procesos de validación, aspecto que se observó menos representado en las producciones de los estudiantes. Se podría explorar mediante una investigación-acción haciendo hincapié en caracterizar los procesos de validación que utilizan los estudiantes y proponer tareas que permitan mejorar las justificaciones de las acciones y decisiones asumidas durante la utilización de conocimientos matemáticos.

Se señala también como una posible línea de investigación la profundización de la reflexión acerca del tipo de experiencias que favorecerían la discusión con los futuros ingenieros en torno a la toma de decisiones orientadas a un desarrollo tecnológico sostenible en la sociedad.

Para finalizar, se considera que esta tesis constituye un punto de partida muy promisorio para reflexionar en torno al conocimiento reflexivo en la formación de futuros ingenieros, que los prepare para atender las necesidades y problemas técnicos de la sociedad y tenga en cuenta la sostenibilidad ambiental, económica y social.

Referencias

Arsac G., Chapiron G., Colonna A., Germain G., Guichard Y. y Mante M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège. Une suite de situations permettant l'appropriation des règles du débat mathématique.* Presses Universitaires de Lyon-IREM.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los estudiantes de matemáticas*. Universidad de los Andes. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00520133

Barreiro, P y Leonian, P. (2017). La metacognición en clases de matemática: un aporte para la enseñanza. *Epsilon, 97*, 43-56. https://thales.cica.es/epsilon/?q=node/4707

Bojorquez Gutiérrez, K. (2021). *Correlación entre ansiedad matemática, pensamiento matemático y razonamiento covariacional en estudiantes de ingeniería*. (Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Chihuahua).

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38, 86–95.

Camilloni, A (2016). Tendencias y formatos en el currículo universitario. *Itinerarios Educativos, 9*, 59-87.

Came López, A. B., Poco, A. N., Ponce de León, J. A., Nadal, J. C., y Sanchis Bisio, C. M. (2016). Cómo funcionan las estrategias heurísticas en la resolución de problemas matemáticos: Ciclo básico y carreras de ingeniería. *Repositorio Institucional Abierto UTN.* https://repositoriosdigitales.mincyt.gob.ar/vufind/Record/RIAUTN_6ce780ef5be33488a2651f927fae73a5

Caraballo Carmona, C. M., Nieves Pupo, S., y Páez Hernández, Y. C. (2021). Diagnóstico del desarrollo del pensamiento matemático avanzado en la formación inicial del profesor de Matemática. *Sinergia Académica*, 4(1), 1-14. https://doi.org/10.51736/sa.v4i1.47

Corral, Y., Corral, I. y Franco Corral, A., (2016). El proceso de investigación-acción en el aula: modelo de Mckernan. En: *Producción intelectual en ciencias de la educación. "Investigación y creación"* (pp.684-693). Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Carabobo.

De Bono, E. (1991). *El pensamiento lateral*. Paidós Argentina.

Dewey, J. (1989). *Como pensamos, nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*. Editorial Paidós.

Dewey, J. (1998). *Democracia y educación, una introducción a la filosofía de la educación*. Editorial Morata.

Díaz Lozada, J. (2018). *El desarrollo de la flexibilidad del pensamiento matemático. Lógica, heurística y metacognición en la resolución de problemas*. Editorial Académica Española.

Díaz Lozada, J. y Díaz Fuentes, R. (2018) Los métodos de resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento matemático. *Bolema*, 32(60), 57-74. https://www.scielo.br/pdf/bolema/v32n60/0103-636X-bolema-32-60-0057.pdf.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En R. Duval y A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 61-94). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Elliott, J (1997). *La investigación-acción en educación* (Tercera edición). Ediciones Morata.

García García, J.J. (1998). La creatividad y la resolución de problemas como bases de un modelo didáctico alternativo. *Educación y Pedagogía, X*(21), 145-173. https://revistas.udea.edu.co/index.php/revistaeyp/article/view/6758/6191

García Retana, J. (2014). Ingeniería, matemáticas y competencias. *Actualidades Investigativas en Educación*, *14*(1), 1-29.

Gutiérrez, A. (1992). Procesos y habilidades en visualización espacial. En E. Filloy, L. Puig, L. y A. Gutiérrez, (Eds.), *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Geometría* (pp. 44-59). Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV.

Hanna, G. (2020). Mathematical Proof, Argumentation and Reasoning. En S. Lerman (Ed), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 561-566). Cham.

Latorre, A. (2005). *La investigación-acción. Conocer y cambiar la práctica educativa*. Graó.

Marino, T., y Rodríguez, M. (2009). Un estudio exploratorio sobre heurísticas en estudiantes de un curso de matemática de nivel pre-universitario. *Paradigma, 30*(2), 159-178.

Mariño Pérez, A., Garrido Rodríguez, M., Díaz Lozada, J. A., González Rangel, M. Ángel, y Travieso González, Y. (2021). Necesidad de valorizar el desarrollo del pensamiento lógico en la enseñanza de la ingeniería. *Referencia Pedagógica*, 9(1), 3–14. https://rrp.cujae.edu.cu/index.php/rrp/article/view/223

Osses Bustingorry, S. y Jaramillo Mora, S. (2008). Metacognición: un camino para aprender a aprender. *Estud. pedagóg*, 34(1), 187-197.http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052008000100011

Perkins, D. (1995). *La escuela inteligente, del adiestramiento de la memoria a la educación de la mente.* Gedisa.

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas.

Reyes-Santander, P. (2015). Caracterización del pensamiento matemático. *Paideia*, (20), 27-41. https://journalusco.edu.co/index.php/paideia/article/view/1189/2329

Riveros Panqueva, C. F. (2019). *Desarrollo del pensamiento matemático en el aprendizaje de la derivada*. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Rodríguez, M. (2015). Resolución de problemas. En M.D. Pochulu y M.A. Rodríguez, (Comps.), *Educación Matemática. Aportes a la formación desde distintos enfoques teóricos* (pp.153-174). Eduvim y Universidad Nacional de General Sarmiento.

Rodríguez, M. (Coord.) (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Ediciones UNGS.

Rodriguez, M. (Coord.) (2019). *Heurísticas en la resolución de problemas matemáticos*. Ediciones UNGS.

Romero Pabón, J, Hincapie Torres, D y Vergara Ríos, G. (2021). Fortalecimiento del pensamiento matemático mediante el uso de la hoja de cálculo como herramienta didáctica en los estudiantes de primer ciclo de educación superior. *Ciencia e Ingenieria*, 8(2), 1-38. http://revistas.uniguajira.edu.co/rev/index.php/cei/article/view/236.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). Macmillan.

Schoenfeld, A (1995) *Ideas y tendencias en la resolución de problemas*. Olimpíada Matemática Argentina.

Schoenfeld, A. (2012) How we think: a theory of human decision-making, with a focus on teaching. En S. Je Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp.229-243). Springer Open.

Siñeriz, L., y Ferraris, C. (2021). Heurísticas: un componente del proceso de aprender a demostrar. *Revista de Educación Matemática*. https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10445

Serna, E. y Flórez, G. (2013). El razonamiento lógico como requisito funcional en ingeniería. *Proceedings Eleventh Latin American and Caribbean Conference for Engineering and Technology* (pp. 1-10). México.

Sriraman, B. y Umland, K. (2020). Argumentation in mathematics education. En S. Lerman (Ed), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 63-66). Cham.

Stacey, K. (2006). What is mathematical thinking and why is it important? Tsukuba International Conference 2007 "Innovative Teaching Mathematics through Lesson Study (II)"—Focusing on Mathematical Thinking. Japón. http://e-archives.criced.tsukuba.ac.jp/data/doc/pdf/2009/02/Kaye_Stacey.pdf

Stewart, J. (2008). *Calculo de varias variables: trascendentes tempranas* (Sexta edición). CENGAGE Learning.

Stillman, G. (2020). Metacognition. En S. Lerman (Ed), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 608-611). Cham.

Velásquez, L. J. (2015). El ingeniero con conciencia social: Una posibilidad para el desarrollo sostenible. *Universidad, Ciencia y Tecnología*, *19*(74), 25-38.

Vigotsky, L. S. (2007). *Pensamiento y habla*. Ediciones Colihue SRL.

Anexo N°1

Tabla Encuesta:

<table>
<tr><th colspan="3">Preguntas sobre el estudiante</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">¿Pudiste resolver el problema con los conocimientos que tenías?</td><td>Si: ¿qué conocimientos o ideas considerás que resultaron claves para resolverlo?</td></tr>
<tr><td>No: ¿a qué otros conocimientos o ideas recurriste para su resolución? ¿De dónde obtuviste esa nueva información que considerás que te faltaba?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">¿Entendiste lo que se pedía desde la primera vez que leíste el problema?</td><td>Si: ¿Qué fue lo que te ayudó a comprenderlo? ¿Cuáles fueron los datos claves para su interpretación?</td></tr>
<tr><td>No: ¿Qué pensaste o interpretaste? ¿Qué te llevó pensar que lo que interpretaste en un primer momento estaba mal?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">¿Pudiste encontrar una vía de solución rápido?</td><td>Si: ¿te resultó fácil? ¿Por qué? ¿Fuiste sólo por esa vía de solución sin utilizar otra?</td></tr>
<tr><td>No: ¿Tomaste otras alternativas antes de quedarte con la que finalmente presentaste?*</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">¿Te hiciste autopreguntas sobre el problema? (como, por ejemplo: ¿qué pasaría si cambiamos alguna condición? ¿Cuál sería un caso límite?, etc.)</td><td>Sí: ¿Cuáles fueron esas preguntas? ¿Te ayudaron a comprender más el problema?</td></tr>
<tr><td>No: ¿Te haces habitualmente autopreguntas cuando resolves problemas?**</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2">¿Pensaste si la solución responde lo que se te pide y si tiene coherencia con el problema?</td><td>Si: ¿Cómo lo verificaste? ¿Por qué crees que tiene coherencia la solución?</td></tr>
<tr><td>No: ¿Generalmente verificas la solución a los problemas matemáticos? ***</td></tr>
<tr><th colspan="3">Preguntas sobre el grupo</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">Describí en pocas palabras cómo surgió la solución del problema en el grupo. ¿Cómo fue la interacción al interior del grupo?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">¿Dentro del grupo hubo distintos caminos para resolver el problema?</td><td>Si: ¿Por qué se quedaron con esa vía de solución? Comentá brevemente alguna propuesta o idea que no prosperó</td></tr>
<tr><td>No: ¿Todos tenían la misma idea o sólo un/a compañero/a propuso? ¿Por qué?</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">Enunciá al menos una fortaleza y al menos una debilidad del trabajo en grupos para la comprensión y la resolución del problema.</td></tr>
</table>

*Dentro de la esta respuesta hay una bifurcación con las preguntas: Si respondió **Si**: ¿Cuál fue? ¿Por qué desististe de la otra vía de solución? ¿Crees que ambas habrían sido factibles? Y si respondió **No**: ¿Por qué crees que no encontraste ninguna vía de solución?

** Dentro de la esta respuesta hay una bifurcación con las preguntas: **Si:** ¿Por qué no te hiciste autopreguntas para este problema? Y si respondió **No**: ¿Por qué no te haces autopreguntas? ¿Consideras que son necesarias? Explicar tu respuesta

*** Dentro de la esta respuesta hay una bifurcación con las preguntas: **Si:** ¿Por qué no verificaste la solución en este problema? Y si respondió **No**: ¿Por qué no verificas la coherencia de la solución en un problema? ¿Consideras que es necesario? Explicar tu respuesta

Anexo N°2

Consignas Entregadas a los Estudiantes

Coloquio 1

Se desea reforzar la estructura del silo que se muestra en la figura 1, colocando un alambre que se va a arrollar alrededor de la superficie cilíndrica. El alambre dará seis vueltas en torno al silo y cada vuelta mantiene la misma variación de altura que la anterior. ¿Cuántos metros de alambre se necesitan?

Figura 1

¿Se podrá colocar un tensor tangencial a la curva desde un suncho ubicado en el punto que se muestra en la figura 1? En la figura 2 se puede observar el silo visto desde arriba. En caso de ser posible, ¿cuántos metros de cable se necesitan?

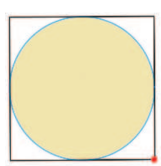


Figura 2
Vista desde arriba del silo

La empresa quiere pintar el silo de acuerdo a los colores que identifican la marca. Se pintará de verde debajo de la curva de intersección entre la parte cilíndrica del silo y un cilindro parabólico, cuya generatriz es perpendicular al cilindro circular recto. El punto más alto de la curva está a 3/4 de la altura total del cilindro y el punto más bajo a 1/3 de dicha altura. Si el rendimiento de la pintura es 5 metros cuadrados/ litros, ¿cuántos litros de pintura se necesitan?

Coloquio 2

Para realizar este coloquio deben trabajar con los datos obtenidos en el coloquio anterior, recordando que el silo fue pintado con ciertas características.

El valor de la temperatura en grados centígrados en un punto equivale al valor en metros de la distancia entre dicho punto y el vértice inferior del silo. Un insecto está en uno de los puntos más altos de la parte pintada. La temperatura ideal para su organismo es 30% inferior a la que corresponde a su posición actual. ¿Hacia dónde debería dirigirse para alcanzar la temperatura óptima?

Si ahora el insecto camina por el borde de la pintura, ¿A qué razón cambia la temperatura respecto al tiempo cuando el insecto pasa por uno de los puntos más bajo de la parte pintada?

Ahora se quiere reforzar el tronco del cono inferior del silo con aros circulares de alambre reforzado. Realizar un diseño posible de cómo se puede realizar este refuerzo, justificar el diseño y calcular cuánto alambre se emplearía en su construcción.

Para otorgar firmeza a la estructura, se colocarán cuatro varillas de metal en forma de tensores normales a la superficie. Para cada varilla, un extremo se suelda en algún punto de la superficie cónica del silo y el otro se fija sobre una base de hormigón construida en el piso. Decidir y fundamentar dónde conviene colocar las varillas. Si se sabe que la varilla de metal tiene un costo de $89 el metro. ¿Cuánto dinero se destinará para la compra de varillas?

Coloquio 3

Se desea colocar una mezcladora como la de la figura dentro del silo. El volumen de la mezcladora debe ser 1/6 del volumen total del silo. ¿Qué dimensiones debe tener?

Se la quiere colocar en el interior del silo colgada con cables de acero de manera de que permanezca estable. Decidir y justificar la ubicación de la mezcladora y de qué forma estará suspendida para su óptimo funcionamiento.

Coloquio 4

Se quiere extraer el contenido del silo con un transportador de tornillo sin fin. Para ello se lo construirá de manera que recorra 20 metros hasta el camión. Decidir y justificar el diseño del transportador. ¿Cuánto material se necesita para su construcción?

El valor de la temperatura en grados centígrados en un punto equivale al valor en metros de la distancia entre dicho punto y el punto en el suelo más cercano al vértice inferior del silo. Un estudio ha demostrado que si el flujo de calor hacia afuera del silo es menor que -100 unidades de calor por unidad de tiempo, podría arruinar los granos que se encuentra en su interior. Justificar si es necesario vaciar el silo para no perder la producción de granos.

Un insecto de masa 0,4 mg camina desde el punto más bajo hasta el punto más alto del borde de la pintura del silo. Si sólo actúa la fuerza peso ¿Cuál es el trabajo del insecto al moverse por dicha curva?

Anexo N°3

Resolución Experta de los Coloquios

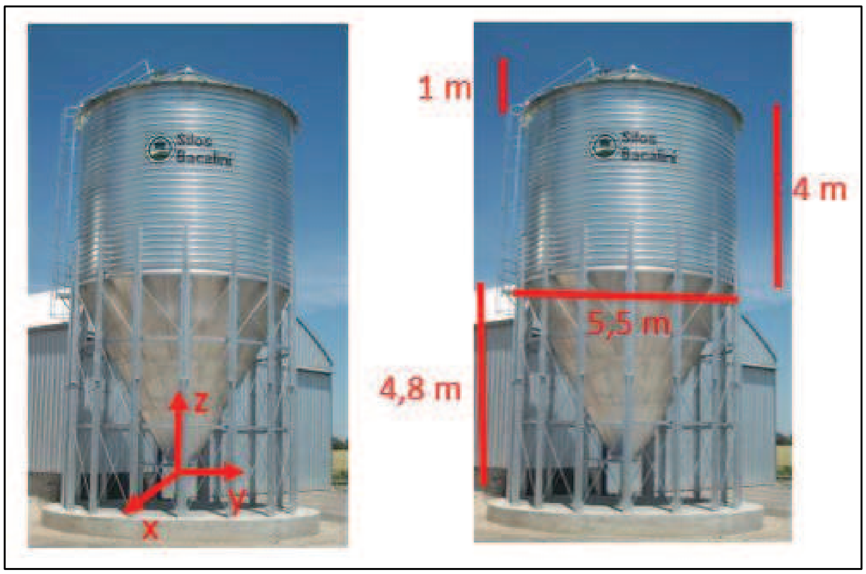
Resolución Coloquio 1

Primero se deben ubicar los ejes coordenados de tal manera que permita establecer, con la escala dada, las ecuaciones de las superficies del silo. Se ubicará el origen de coordenadas en el vértice inferior del cono que está más cerca del suelo.

Sacando medidas aproximadas desde la fotografia se obtienen las siguientes medidas:

Figura 28

Ubicación del silo y medidas



Con estas medidas se determinan las ecuaciones de las superficies.

<u>Cono inferior</u>

En forma paramétrica:

$$\vec{r}(\theta,\rho) = sen(0{,}521)\ \cos(\theta)\,\rho\,\vec{\imath} + sen(0{,}521)\ sen(\theta)\,\rho\,\vec{\jmath} + \cos(0{,}521)\,\rho\,\vec{k}$$

Con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0{,}5 \leq \rho \leq 5{,}532$

Observación 1: usando trigonometría se determinó el ángulo del cono y con el mismo triángulo usando Pitágoras se determinó el valor de la hipotenusa para determinar el ρ máximo.

En forma explícita: $z = cotg(0.521)\sqrt{x^2 + y^2}$

Cilindro circular recto:

En forma paramétrica:

$$\vec{r}(\theta, z) = 2{,}75\cos(\theta)\,\vec{\imath} + 2{,}75\,sen(\theta)\vec{\jmath} + z\vec{k} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi\,, \quad 4{,}8 \leq z \leq 8{,}8$$

En forma implícita: $x^2 + y^2 = 2{,}75^2$

<u>Cono superior:</u>

En forma paramétrica:

$$\vec{r}(\theta, \rho) = sen(1{,}92)\ \cos(\theta)\,\rho\,\vec{\imath} + sen(1{,}92)\,sen(\theta)\,\rho\,\vec{\jmath} + (\cos(1{,}92)\,\rho + 9{,}8)\,\vec{k}$$

Con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0{,}5 \leq \rho \leq 2{,}926$

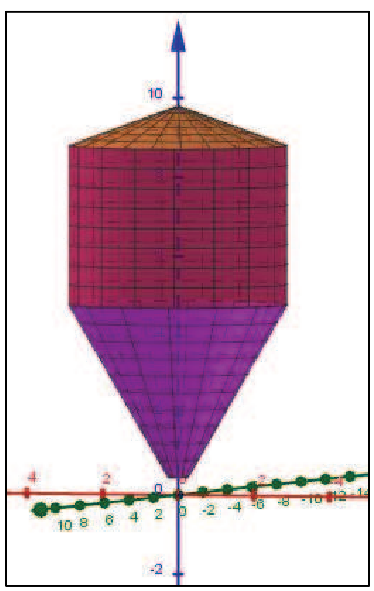
Observación 2: usando trigonometría se determinó el ángulo del cono y con el mismo triángulo usando Pitágoras se determinó el valor de la hipotenusa para determinar el ρ máximo.

En forma explícita: $z = 9{,}8 - cotg(1{,}22)\sqrt{x^2 + y^2}$

En la figura 29 se muestran las superficies graficadas en GeoGebra.

Figura 29

Silo graficado en el GeoGebra

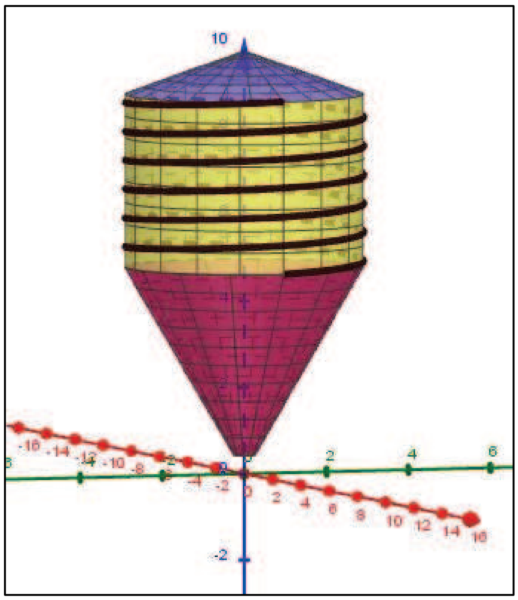


Como hay que determinar la cantidad de alambre que se necesita para reforzar la superficie cilíndrica de tal manera que dé seis vueltas manteniendo la variación de altura, se parametriza la curva que se llama hélice circular y mediante una regla de tres simple se determina la variable z.

Curva C : $\vec{r_1}(t) = 2{,}75\cos(t)\,\vec{\imath} + 2{,}75\, sen(t)\vec{\jmath} + \left(\frac{1}{3\pi}t + 4{,}8\right)\vec{k} \qquad con\ 0 \leq t \leq 12\pi$

Figura 30

Gráfico de la hélice sobre el silo



Para calcular la longitud del alambre se debe utilizar la fórmula de longitud de arco comprobando primero la suavidad de la curva, es decir, que las funciones componentes tengan derivadas continuas y que no se anulen simultáneamente.

Figura 31

Fórmula de la longitud de curva

$$\boxed{L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt}$$ [3]

Luego, para el silo estudiado: $\vec{r_1}'(t) = -2{,}75\, sen(t)\vec{\imath} + 2{,}75\, cos(t)\vec{\jmath} + \frac{1}{3\pi}\,\vec{k} \quad con\ 0 \leq t \leq 12\pi$

---

[3] Stewart, 2008, p 830

$$L = \int_0^{12\pi} \left|\vec{r_1}'(t)\right| dt = \int_0^{12\pi} \sqrt{(2{,}75)^2 + \frac{1}{9\pi^2}}\, dt = \sqrt{(2{,}75)^2 + \frac{1}{9\pi^2}}\; 12\pi$$

Por lo tanto, para reforzar el silo se necesitan $\sqrt{(2{,}75)^2 + \frac{1}{9\pi^2}}\; 12\pi \cong 103{,}75$ metros de alambre.

Para ver la existencia de un tensor tangencial a la curva se toma t_0 tal que desde el punto $r(t_0)$ saldrá el tensor tangencial a la curva.

Se satisface: $r(t_0) = \left(2{,}75\cos(t_0)\ , 2{,}75\ sen(t_0), \frac{1}{3\pi} t_0 + 4{,}8\right)$ pertenece a la curva C,

El vector $\vec{r}'(t) = -2{,}75\ sen(t_0)\vec{\imath} + 2{,}75\ cos(t_0)\vec{\jmath} + \frac{1}{3\pi}\ \vec{k}$ es el vector director de la recta tangente a la curva C en $r(t_0)$.

Según figura 2 el suncho está ubicado en el punto $(2{,}75\ ; 2{,}75\ ; 0)$.

La recta tangente a C en $r(t_0)$ tiene por ecuación:

$$R_{tg} : \begin{cases} 2{,}75\cos(t_0) - 2{,}75\ sen(t_0)\lambda \\ 2{,}75 sen(t_0) + 2{,}75\cos(t_0)\,\lambda \\ \frac{1}{3\pi} t_0 + 4{,}8 + \frac{1}{3\pi}\lambda \end{cases} \qquad \lambda \epsilon R$$

Para que el punto $r(t_0)$ pertenezca a la recta tangente se debe cumplir:

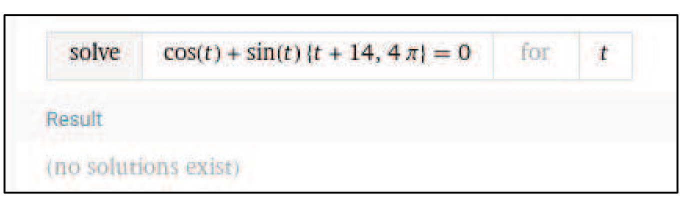
$$\begin{cases} 2{,}75\cos(t_0) - 2{,}75\ sen(t_0)\lambda = 2{,}75 & (1) \\ 2{,}75 sen(t_0) + 2{,}75\cos(t_0)\,\lambda = 2{,}75 & \\ \dfrac{1}{3\pi} t_0 + 4{,}8 + \dfrac{1}{3\pi}\lambda = 0 & (2) \end{cases}$$

Luego en (2) $\lambda = -t_0 - 14{,}4\pi$. En (1) $\cos(t_0) + (t_0 + 14{,}4)\ sen(t_0) = 1$

Utilizando el software Wolfram Alfa en forma online no se obtuvo solución para t_0.

Figura 32

Resolución en GeoGebra



Por lo tanto, no existe ningún punto sobre la curva C tal que pase por el punto indicado.

Como la empresa quiere pintar el silo de acuerdo a los colores que identifican la marca, lo pintará de verde debajo de la curva de intersección entre la parte cilíndrica del silo y un cilindro parabólico, cuya generatriz es perpendicular al cilindro circular recto. Además, se sabe que el punto más alto de la curva está a 3/4 de la altura total del cilindro y el punto más bajo a 1/3 de dicha altura.

Para determinar el cilindro parabólico se tomará la ecuación: $z = ay^2 + b$. Usando los datos de las alturas máximas y mínimas se determinan los valores de a y b.

Nota: se eligió esta forma del cilindro parabólico pero podría haber sido $z = ax^2 + b$ u otra forma.

De acuerdo con las referencias, el punto más alto está en $z = 7{,}8$ y el punto más bajo está en $z = \frac{92}{15}$

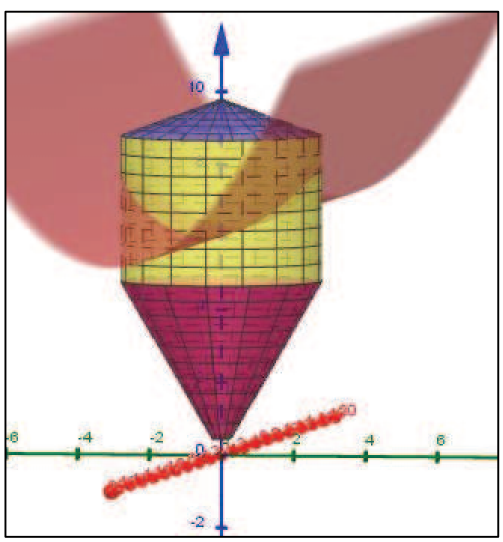
$$Si\ y = 0 \quad \frac{92}{15} = a.0^2 + b \ \rightarrow \quad b = \frac{92}{15}$$

$$Si\ y = 2{,}75 \quad 7{,}8 = a.2{,}75^2 + \frac{92}{15} \quad \rightarrow a = \frac{80}{363}$$

Luego la ecuación del cilindro parabólico es $z = \frac{80}{363}y^2 + \frac{92}{15}$

Figura 33

Gráfico del cilindro parabólico

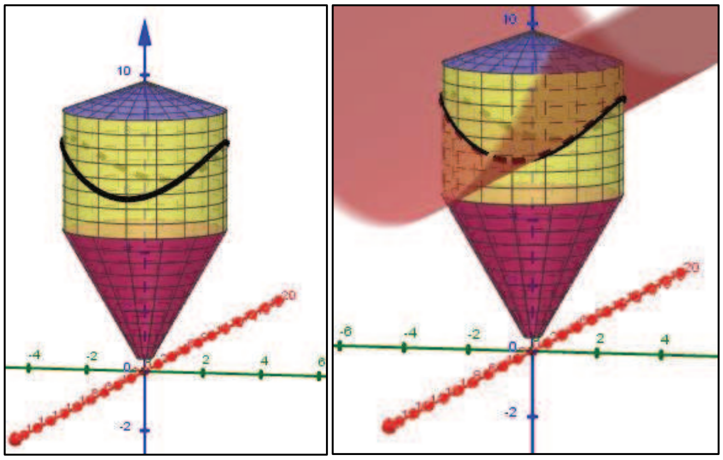


Y la curva intersección entre el cilindro circular recto y el cilindro parabólico está dada por:

$$\vec{r}_2(t) = \langle 2{,}75\ cos(t); 2{,}75\ sen(t); \frac{80}{363} 2{,}75^2 sen^2 t + \frac{92}{15} \rangle \quad con\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

Figura 34

Gráfico del cilindro parabólico junto con la curva intersección



Como se quiere pintar debajo de la curva intersección se utiliza la aplicación de las integrales de línea de campos escalares

Sea la curva plana $\vec{r}_2(t) = \langle 2{,}75\ cos(t); 2{,}75\ sen(t) \rangle \quad con\ 0 \leq t \leq 2\pi$ con $|\vec{r}\,'(t)| = 2{,}75$

El área que se ha de pintar es $\int_C\ f(\vec{r}(t))\ |\vec{r}\,'(t)|\ dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{80}{363} 2{,}75^2 sen^2 t + \frac{92}{15} \right) 2{,}75\ dt$

$$2{,}75^3 \frac{80}{363} \int_0^{2\pi} sen^2 t\ dt + \frac{506}{15}\pi = 2{,}75^3 \frac{80}{363}\pi + \frac{506}{15}\pi$$

Como el rendimiento de la pintura es 5 metros cuadrados/ litros, haciendo una regla de tres simple se obtiene que se necesitan $2{,}75^3 \frac{80}{1815}\pi + \frac{506}{75}\pi \cong 24{,}07\ litros.$

Resolución Coloquio 2

El valor de la temperatura en grados centígrados en un punto equivale al valor en metros de la distancia entre dicho punto y el vértice inferior del silo. Los ejes de referencias se ubican como en el coloquio 1. La temperatura en (x, y, z) es: $T(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Uno de los puntos más alto de la curva intersección entre el cilindro circular recto y el cilindro parabólico es: $r\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0; 2.75\,; 7{,}8)$. La temperatura actual del insecto equivale a: $T(0; 2{,}75; 7{,}8) = 8{,}27$

Como la temperatura óptima del insecto es 30% inferior a la actual, esta equivale a

$T = 6{,}125$

Se podía interpretar de varias maneras:

<u>Opción 1:</u> el insecto se dirige en dirección $\vec{u}$ donde la razón de cambio de la temperatura es -0,3.

Se utiliza una derivada direccional de la temperatura en el punto más alto en dirección $\vec{u}$.

Sea $\vec{u} = \langle a, b, c\rangle$ un vector unitario. Siendo el gradiente $\nabla T(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\langle x, y, z\rangle$

$$D_{\vec{u}}T(0; 2{,}75\,; 7{,}8) = \nabla T(0; 2{,}75; 7{,}8)\vec{u} = \langle 0; 22{,}74; 64{,}51\rangle\langle a, b, c\rangle = 0.\,a + 22{,}74b + 64{,}51c$$

Luego se debe satisfacer

$$\begin{cases} 0.\,a + 22{,}74b + 64{,}51c = -0.3 \\ \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

Pero como son dos ecuaciones con tres incógnitas. Los estudiantes deben tomar una decisión para continuar. Podrían pensar que el insecto no vuela, lo que genera la restricción de que el insecto está sobre la superficie cilíndrica. O que vuela y que se puede desplazar fuera del silo.

<u>Opción 2</u>: Sabiendo que la temperatura ideal para el insecto es $T = 6{,}125$ se puede buscar un punto que la satisface y que el insecto se dirija hacia ese punto. También se debe considerar si el insecto vuela o no.

Suponiendo de que el insecto no vuela, es decir, que permanece en la superficie del silo. Se satisface:

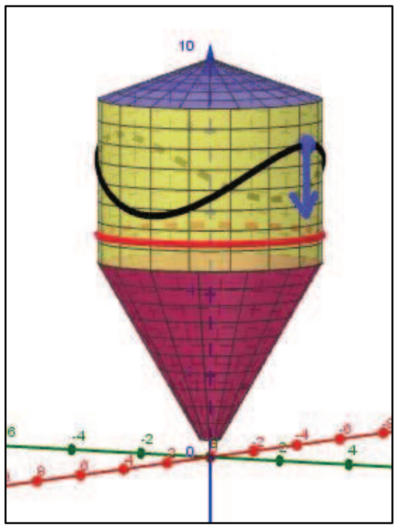
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 6{,}125 \\ x^2+y^2 = 2{,}75^2 \end{cases}$$

Luego $z = 5{,}47$.

Todos los puntos sobre la curva $\overrightarrow{r_3}(t) = \langle 2{,}75\cos(t)\,; 2{,}75\, sen(t); 5{,}47\rangle\ con\ 0 \le t \le 2\pi$ cumplen con la temperatura ideal. Es decir, que si el insecto se mantiene sobre esa curva está en su temperatura óptima. La dirección en la que se debe dirigir para llegar lo más rápido posible es $\vec{u} = \langle 0{,}0,-1\rangle$

Figura 35

Representación gráfica de la respuesta obtenida



Para calcular la razón de cambio de la temperatura respecto al tiempo cuando el insecto pasa por uno de los puntos más bajo de la parte pintada se utiliza la regla de la cadena. La función temperatura es diferenciable en todo punto distinto del origen de coordenadas, y la curva es suave, por lo que cumple con las hipótesis de la regla de la cadena.

Uno de los puntos más bajo de la curva es: $\overrightarrow{r_2}(0) = \langle 2{,}75; 0; 6{,}13\rangle$

Regla de la cadena: $\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{dz}{dt}$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

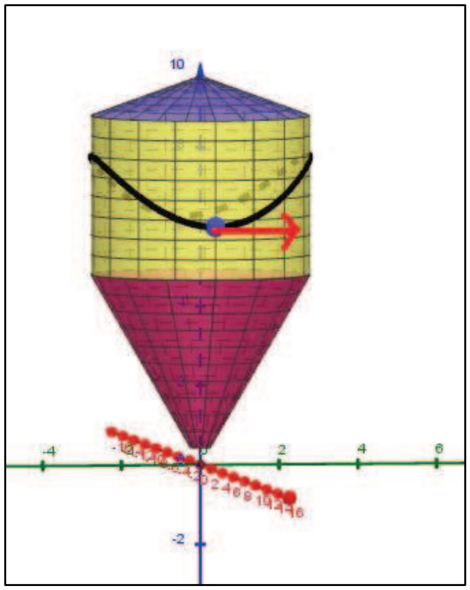
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\langle x,y,z\rangle\langle -2{,}75\, sen(t); 2{,}75\cos(t)\,; 6{,}67\cos(t)\, sen(t)\rangle$$

Reemplazando en el punto más bajo $\frac{dT}{dt} = 0$.

Era esperable esta respuesta ya que en el punto más bajo tenemos un mínimo de la curva y la recta tangente en dicho punto es ortogonal al vector $\langle 0,0,1 \rangle$. Es decir que la pendiente es cero.

Figura 36

Representación de la recta tangente a la curva en el punto más bajo



Para reforzar el tronco del cono inferior del silo con aros circulares de alambre los estudiantes deben diseñar y justificar su ubicación utilizando conocimientos de otras materias, como por ejemplo en el caso de Ingeniería civil y Mecánica la materia de Estabilidad.

Luego de que el grupo se pone de acuerdo acerca de dónde ubican los aros utilizan los conceptos de curvas de nivel para determinar cuánto alambre se necesita para su construcción.

Una opción sería poner cuatro aros equidistantes. Uno en la mitad del cono, otro en la unión entre el cono y el cilindro para que sea más resistente esta unión. Y los otros dos a la altura de ¼ y ¾ para evitar deformación del silo.

La curva de nivel n ($n = 1{,}2$; $2{,}4$; $3{,}6$; $4{,}8$) queda determinada por :

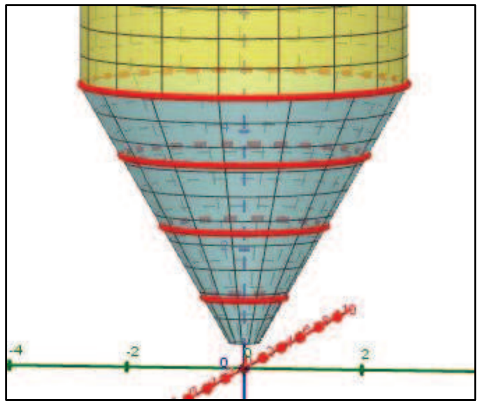
$$n = cotg(0{,}512)\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \quad x^2 + y^2 = n^2\, tg(0{,}512)^2$$

las ecuaciones de las curvas son:

$$\vec{r}(t) = \langle n\, tg(0{,}512)\cos(t)\,; n\, tg(0{,}512) sen(t); n \rangle \; con\; 0 \leq t \leq 2\pi$$

Figura 37

Disposición de los aros de refuerzo



Para determinar las longitudes se puede usar la fórmula de longitud de curva o, conociendo el radio de las circunferencias, utilizar la fórmula de longitud de una circunferencia $\pi \; Diametro$.

$Alambre: 2\,\pi.1{,}2 + 2\pi.2{,}4 + 2\pi.3{,}6 + 2\pi 4{,}8 = 24\pi$

Para otorgar firmeza a la estructura, se colocarán cuatro varillas de metal en forma de tensores normales a la superficie. Para cada varilla, un extremo se suelda en algún punto de la superficie cónica del silo y el otro se fija sobre una base de hormigón construida en el piso.

Una vez que el grupo decida dónde colocar los tensores se aplica el concepto de recta normal a una superficie.

Por ejemplo, supongamos que se decide colocar los cuatro tensores en el alambre que está en la mitad de la superficie cónica equidistantes.

De la parametrización de la curva que está a la altura 2,4 metros del suelo se determinan cuatro puntos, correspondientes para los valores del parámetro $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi\,, \frac{3}{2}\pi$

Por ejemplo para t=0 : $r(0) = (2{,}4\; tg(0{,}512);\; 0\;;\; 2{,}4) = P_4$

El vector director de la recta normal a la superficie es: $\vec{v} = \langle F_x\;;\; F_y; F_z\rangle$

Siendo $F(x,y,z) = z - cotg(0{,}512)\sqrt{x^2 + y^2}$

Luego en P_4, $\vec{n} = \langle -cotg(0{,}512); 0; 1\rangle$. Cuya recta tiene ecuación:

$\vec{R}(t) = \langle -cotg(0{,}512)\, t + 2{,}4\, tg(0{,}512)\, ; 0\, ; t + 2{,}4 \rangle \quad con - 2{,}4 \leq t \leq 0$.

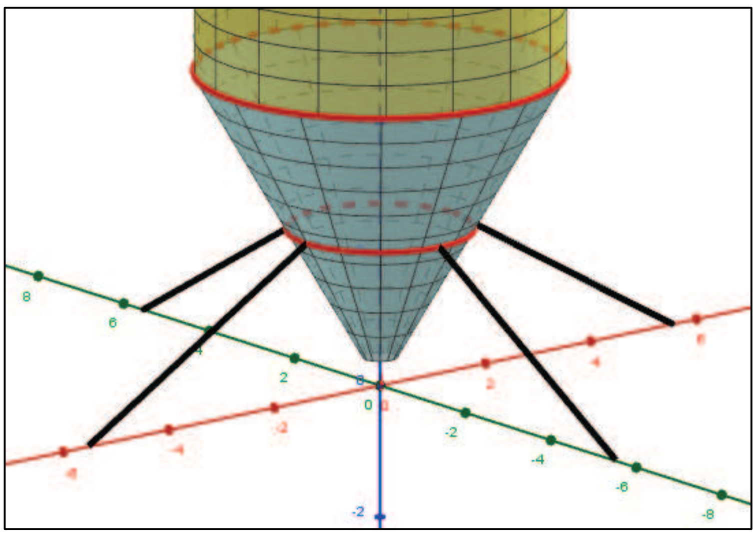
Sabiendo el punto inicial y el punto final del segmento de recta se puede determinar la longitud.

Punto final $P_5 = (2{,}4\big(tg(0{,}512) + cotg(0{,}512)\big); 0\, ; 0)$.

Luego $|P_4P_5| = 4{,}899$ metros. Luego, como son cuatro cables se necesitarán 19,596 metros de varillas de metal. Con un costo de $436,10.

Figura 38

Disposición de las varillas que otorgan firmeza



Primero se calcula el volumen total del silo.

$$Volumen = \iint_D \int_{cotg(0{,}512)\sqrt{x^2+y^2}}^{9{,}8-cotg(1{,}22)\sqrt{x^2+y^2}} dzdA = \int_0^{2\pi} \int_0^{2{,}75} \int_{cotg(0{,}512)r}^{9{,}8-cotg(1{,}22)r} rdzdrd\theta = 139{,}39\, m^3$$

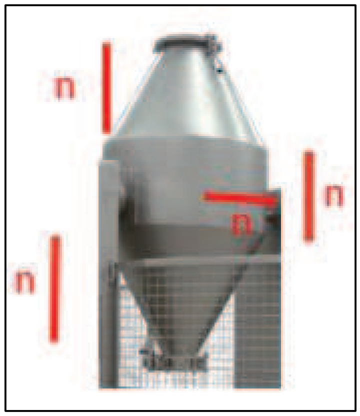
Resolución Coloquio 3

Como la mezcladora debe tener 1/6 del volumen del silo, por ende su volumen en $23{,}23\ m^3$

Se va a suponer que las dimensiones de la mezcladora satisfacen:

Figura 39

Medidas de la mezcladora



Nota: la mezcladora se pondrá desde el origen de coordenadas para poder facilitar las cuentas, ya que el volumen es independiente de la ubicación de la misma.

Con este supuesto las ecuaciones de las superficies son:

Cono inferior: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Cilindro circular recto: $x^2 + y^2 = n^2$

Cono superior: $z = 3n - \sqrt{x^2 + y^2}$

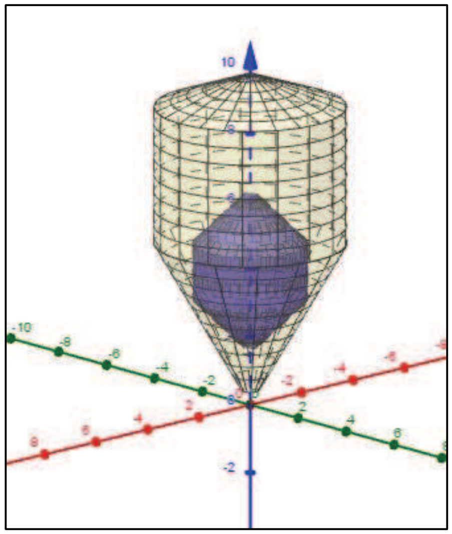
Cuyo volumen es: $\int_0^{2\pi} \int_0^{n} \int_r^{3n-r} r dz dr d\theta = \frac{5}{3}\pi n^3$.

Como el volumen de la mezcladora es 1/6 del volumen del silo, luego $n = 1{,}64\ metros$

Se propone colocar la mezcladora en el interior con cables de acero y que permanezca estable. Si en la mezcladora ingresan los granos por la parte superior y salen por la parte inferior de la misma, debería estar lo más bajo posible para optimizar el proceso de mezclado. Para este caso se la ubicó a 1,5 metros de altura.

Figura 40

Ubicación de la mezcladora dentro del silo

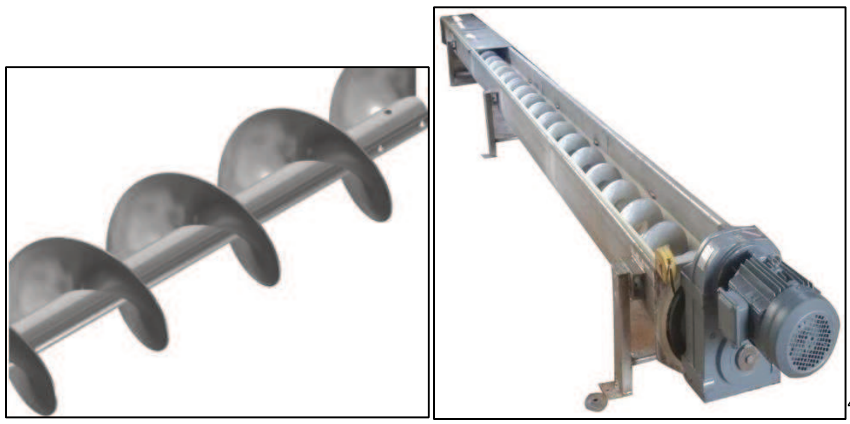


Resolución Coloquio 4

Para la construcción del tornillo sin fin se necesita: un helicoide que actúa como tornillo para transportar los granos, un cilindro que hace girar el tornillo y la mitad inferior de un cilindro circular recto para evitar que se caigan los granos mientras son trasladados por el tornillo sin fin. Similar al que se muestra en la figura 41.

Figura 41

Fotografía de un tornillo sin fin



[4]

Se considera que el tornillo sin fin tiene un diámetro de un metro y el cilindro interior tiene un diámetro de 20 centímetros. Para facilitar los cálculos se trasladan todas las superficies al origen de coordenadas.

Las ecuaciones de las superficies son:

Helicoide:

$$\vec{r_1}(u,v) = u\cos(v)\,\vec{i} + 0{,}5v\vec{j} + u\,sen(v)\vec{k} \quad con\ 0{,}1 \leq u \leq 0{,}5\ ;\ 0 \leq v \leq 12{,}73\pi$$

Cilindro interior:

$$\vec{r_2}(t,y) = 0{,}1\cos(t)\,\vec{i} + y\vec{j} + 0{,}1\,sen(t)\vec{k} \quad con\ 0 \leq t \leq 2\pi\ ;\ \ 0 \leq y \leq 20$$

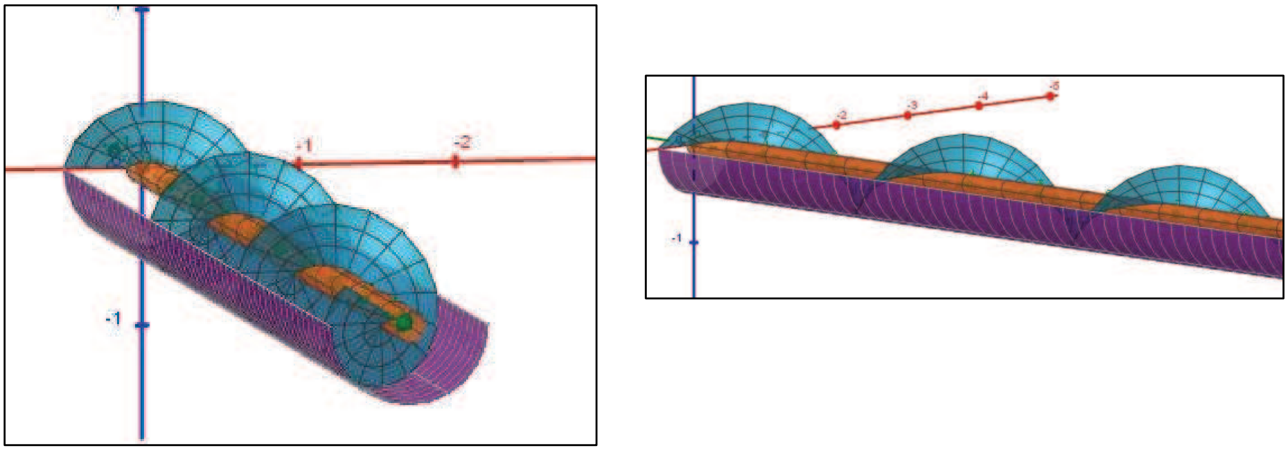
Medio Cilindro inferior:

$$\vec{r_3}(t,y) = 0{,}5\cos(t)\,\vec{i} + y\vec{j} + 0{,}5\,sen(t)\vec{k} \quad con\ \pi \leq t \leq 2\pi\ ;\ \ 0 \leq y \leq 20$$

[4] Tornillo sin fin extraído de https://spanish.alibaba.com/product-detail/factory-price-small-screw-auger-with-good-quality-60598275899.html

Figura 42

Representación gráfica del tornillo sin fin



Para calcular la cantidad de material que se necesita para su construcción se debe calcular el área de cada superficie. Para ello se utiliza la fórmula:

$$A(s) = \iint_D |\overrightarrow{r_u}\, x\, \overrightarrow{r_v}|\, dA$$

Donde S es una superficie paramétrica uniforme definida como $\vec{r}(u, v)$, S es cubierta una sola vez cuando (u, v) varía en todo el dominio D. Donde $\overrightarrow{r_u}$ y $\overrightarrow{r_v}$ son las derivadas parciales respecto a los parámetros u y v respectivamente.

$$\overrightarrow{r_{1_u}}\, x\, \overrightarrow{r_{1_v}} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \cos\ (v) & 0 & sen\ (v) \\ -u\ sen\ (v) & 0{,}5 & u\cos(u) \end{vmatrix}$$

$$= \langle -0{,}5\ sen\ (v);\ -u\ sen^2(v) - u\cos^2(v); 0{,}5\cos(v)\rangle$$

Luego, $|\overrightarrow{r_{1_u}}\, x\, \overrightarrow{r_{1_v}}| = \sqrt{u^2 + 0{,}5^2}$

$A(S) = \int_{0,1}^{0,5}\int_0^{12,73\,\pi} \sqrt{u^2 + 0{,}5^2}dv\, du = 12{,}73\pi \int_{0,1}^{0,5} \sqrt{u^2 + 0{,}5^2}du = 12{,}73\pi * 0.237 =$
$9{,}46m^2$

De manera análoga se calcula el área superficial de los cilindros. Pero también se puede resolver de una manera más rápida usando la fórmula $\pi * 2 * r * h$, donde r es el radio y h

la altura del cilindro. Para la superficie del cilindro inferior solo es la mitad por lo que la fórmula se divide por 2

$$A(S_2) = \pi * 2 * 0{,}1 * 20 = 12{,}56 m^2$$
$$A(S_3) = \pi * 0{,}5 * 20 = 31{,}42\, m^2$$

Por lo tanto, el material total que se necesita para la construcción del tornillo sin fin es:

$$Material\ total\!: \ 9{,}46 + 12{,}56 + 31{,}42 = 53{,}44\, m^2$$

Como la temperatura en grados centígrados en un punto equivale al valor en metros de la distancia entre dicho punto y el punto en el suelo más cercano al vértice inferior del silo, la función temperatura es:

$$T(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

El campo de calor es $\vec{F}(x, y, z) = -\vec{\nabla} T(x, y, z)$

Para calcular el flujo del calor del silo se puede hacer como una integral de flujo, en este caso tres integrales porque el silo tiene tres superficies. Otra opción es utilizar el teorema de Gauss (o divergencia) por tratarse de una superficie cerrada y el campo vectorial tiene derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene al silo.

$$-\vec{\nabla} T(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \langle x, y, z \rangle$$

$$Div\left(-\vec{\nabla} T(x, y, z)\right) = -\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Por el teorema de la divergencia:

$$\iint_S \vec{F} d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2{,}75} \int_{cotg(0{,}512)r}^{9{,}8 - cotg(1{,}22)r} -\frac{2}{\sqrt{r^2 + z^2}} r dz dr d\theta = -58{,}012$$

Con ese resultado no es necesario vaciar el silo ya que no peligra la producción de granos.

Un insecto de masa 0,4 mg camina desde el punto más bajo hasta el punto más alto del borde de la pintura del silo. Si sólo actúa la fuerza peso ¿Cuál es el trabajo del insecto al moverse por dicha curva?

Se debe convertir la masa de insecto a kilogramos. Luego $0{,}4\, mg = 4x10^{-8}\, kg$

Se supone que sólo actúa la fuerza peso, dicha fuerza es:

$$\vec{F}(x, y, z) = -mg\vec{k} = -4x10^{-8} * 9{,}8\vec{k} = -3{,}94x10^{-7}\, \vec{k}$$

Como el campo $\vec{F}$ es conservativo, porque al ser un campo constante es irrotacional, es decir, $Rot(\vec{F}) = \vec{0}$, el resultado de la integral de línea es independiente de la trayectoria. Por lo que el resultado sólo depende del punto inicial y el punto final.

La función potencial de $\vec{F}$ es $f(x, y, z) = -mgz + C$.

Luego por el teorema fundamental de las integrales de línea:

$$W = \int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_C \vec{\nabla} f \, d\vec{r} = f(0; 2{,}75; 7{,}8) - f(2{,}75; 0; 6{,}13) = -mg(7{,}8 - 6{,}13)$$
$$= -6{,}58x10^{-7} J$$

Anexo N°4

Links a las producciones de los estudiantes

Con la finalidad de preservar el anonimato de los integrantes de cada grupo, en las producciones correspondientes se han ocultado los datos de los estudiantes con un rectángulo gris.

- Carpeta con todos los coloquios y encuestas https://drive.google.com/drive/folders/1ZVpMARvOhPyepZLR3EBFJ7mBnQXKlbHS?usp=sharing
- Coloquio 1 del G1 https://drive.google.com/file/d/13dGmZ2rG4LkFC5RaixBQa2q4MXrpdJDX/view?usp=sharing
- Coloquio 1 del G2 https://drive.google.com/file/d/1PngBeGn1MCtieok_Cy9W0WXvYKAInFct/view?usp=sharing
- Coloquio 2 del G1 https://drive.google.com/file/d/1mxEcVV9hMitBg9-p8aKifxE-mNiynj4b/view?usp=sharing
- Coloquio 2 de G2 https://drive.google.com/file/d/1PvsxsuRDuQQYH1_h-wEYbngADc9lz08b/view?usp=sharing
- Coloquio 3 del G1 https://drive.google.com/file/d/1XwvxdMOKpsXt_OQLp0x8BzqfG5Rsea5Z/view?usp=sharing
- Coloquio 3 del G2 https://drive.google.com/file/d/1OKf95o1iQtsHEswlRFFrG5VQVoRxvpch/view?usp=sharing
- Coloquio 4 del G1 https://drive.google.com/file/d/1YrkgAkiz5Ohgf1wkQ3G15wXxz7mYGd2m/view?usp=sharing
- Coloquio 4 del G2 https://drive.google.com/file/d/1B6nDha5pnYNgyuYq-HGbth1FX-1MVa6M/view?usp=sharing

- Encuestas a los estudiantes https://drive.google.com/file/d/1B6nDha5pnYNgyuYq-HGbth1FX-1MVa6M/view?usp=sharing