UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral para la obtención del Grado Académico de **Doctor en Matemática** en el campo del **Análisis Armónico**.

Pesos locales. Propiedades y aplicaciones.

Institución donde se realizó:
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (CONICET - UNL)

Autor:
Federico Augusto Campos
IMAL (CONICET - UNL) - FIQ (UNL)

Director:
Dr. Oscar Mario Salinas
IMAL (CONICET - UNL) - FIQ (UNL)

Codirectora:
Dra. Beatriz Eleonora Viviani
IMAL (CONICET - UNL) - FIQ (UNL)

Jurados:

Dra. Marilina Carena
FIQ (UNL)

Dr. Sheldy Ombrosi
INMABB (UNS-CONICET)

Dr. Carlos Pérez Moreno
BCAM (Univ. del País Vasco)

SANTA FE - ARGENTINA
Diciembre 2023

Resumen

Esta tesis está dedicada al estudio de pesos A_∞ locales, caracterizaciones de los mismos, acotaciones de operadores locales en espacios tipo BMO asociados a estos pesos y su aplicación para obtener estimaciones *a priori* de operadores diferenciales elípticos.

En el capítulo 2, dado un entorno geométrico general, probamos caracterizaciones de una versión local de pesos de Muckenhoupt A_∞. Una de las formas de definir estos pesos es como la unión de todas las clases de Muckenhoupt A_p, con $1 \leq p < \infty$. En este trabajo consideramos esta forma de definición pero mediante las clases A_p β-locales introducidas en [HSV19], las cuales son pesos que verifican este tipo de condición pero solo sobre bolas β-locales, esto es, bolas contenidas en un abierto Ω del espacio y cuyo radio está acotado por una fracción (el parámetro $\beta \in (0,1)$) de la distancia del centro de la bola al borde de Ω. Asimismo, estudiamos como caracterizar nuestros pesos mediante desigualdades como las de [Fuj77] pero que involucran versiones locales de operadores clásicos del Análisis Armónico tales como la función maximal β-local y las transformadas de Riesz β-locales. Además, logramos probar que pidiendo una condición adicional a la clase A_∞-local se caracteriza a los pesos w para los cuales se tiene la acotación de integrales singulares locales desde el espacio de funciones f tales que $f/w \in L^\infty$, al espacio BMO_w^β, el cual es un espacio de tipo BMO relacionado al peso w y que toma las estimaciones correspondientes solo sobre las bolas β-locales. La condición mencionada es la que denotamos $\mathcal{B}_p^\beta$, con $p > 0$, la cual describe, en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, a la clase de pesos w para los que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\frac{r^{n+p}}{w(B)} \int_{\mathcal{S}_\beta(B)-B} \frac{w(x)dx}{|x-\xi|^{n+p}} \leq C$$

para toda bola β-local B, donde

$$\mathcal{S}_\beta(B) = \bigcup_{x\in B} B(x, \beta \mathrm{dist}(x, \Omega^c)).$$

Esta clase tiene un par de caracterizaciones que nos permiten probar los resultados de [Fuj77] en nuestro contexto β-local.

En el capítulo 3, como en [CFL91] y [SS06], consideramos en el contexto euclídeo, $\mathbb{R}^n$ con la distancia euclídea y la medida de Lebesgue, operadores diferenciales elípticos de segundo orden definidos sobre el abierto Ω y estudiamos estimaciones *a priori* en normas

del espacio $BMO^\beta_w(\Omega_0)$ donde w es un peso A_1 local y Ω_0 un abierto tal que $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$. En [CFL91] se ha obtenido este tipo de estimaciones en normas $L^p(\Omega)$, donde $1 < p < \infty$, y en [SS06] en espacios de Hardy $h^1(\Omega)$. Cabe destacar que, en estos trabajos, los coeficientes de los operadores diferenciales considerados no tienen condiciones de continuidad o suavidad, pero estos se encuentran en un subespacio adecuado de los espacios BMO usuales. Siguiendo estos artículos, vemos que debemos obtener acotaciones sobre espacios BMO^β_w de ciertas integrales singulares locales y sus conmutadores. Para operadores no-locales, este tipo de acotación se obtiene en [FFRV20] con las clases usuales de pesos de Muckenhoupt. Llegamos a nuestro fin guiandonos de ese trabajo. Sin embargo, por las técnicas usadas en [CFL91], vemos que las acotaciones mencionadas deben obtenerse también para ciertas integrales singulares locales con núcleo variable y sus conmutadores. El estudio de los armónicos esféricos (como en [CFL91]) nos posibilita conseguir las estimaciones buscadas vía las ya obtenidas en el caso con núcleo no variable. Cabe mencionar que, mientras en [SS06] las estimaciones interiores *a priori* involucran derivadas de primer orden, en las nuestras éstas son removidas.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo tiene como objetivo estudiar con más detalle aspectos del Análisis Armónico vinculados a la clase de pesos introducida en [HSV14]: A saber, consideremos un espacio métrico (X, d) con *propiedad de homogeneidad débil* (PHD), esto es, hay un $N \in \mathbb{N}$ tal que, en cualquier bola $B(x, r)$ del espacio, la cantidad de puntos en la bola cuya distancia de uno al otro es mayor que $r/2$ es a lo sumo N. Tomemos un conjunto Ω, abierto propio de X, con la propiedad de que todas las bolas contenidas en él son conjuntos conexos y, para $x \in \Omega$, denotemos

$$\rho(x) = d(x, \Omega^c) = \text{ínf}\left\{d(x, z) : z \in \Omega^c\right\}.$$

Dado $\beta \in (0, 1)$, definimos la *familia de bolas β-locales* como

$$\mathcal{F}_\beta = \left\{B(x, r) : x \in \Omega,\ 0 < r \leq \beta\rho(x)\right\}.$$

también, equipamos Ω con una medida (positiva) de Borel μ que duplica sobre la familia $\mathcal{F}_\beta$, es decir, hay una constante C (que depende posiblemente de β) tal que, para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$, se tiene

$$\mu\left(B\right) \leq C\mu\left(\frac{1}{2}B\right), \tag{1.0.1}$$

donde, si $B = B(x, r)$ y $t > 0$, $tB = B(x, tr)$. Ahora, en relación a esta familia de bolas, los autores en [HSV14] estudiaron clases de pesos satisfaciendo condiciones como las de Muckenhoupt pero solo sobre bolas de estas familias. Más precisamente, sea w un peso sobre Ω, esto es, $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $w \geq 0$ c. t. p. de Ω. Dado $p \in (1, \infty)$, escribimos $w \in A_p^\beta$ si, y solo si, hay una constante C tal que

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B w\ d\mu \left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B w^{-p'/p} d\mu\right)^{p-1} \leq C,$$

para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$. Por otra parte, escribimos $w \in A_1^\beta$ si, y solo si, hay una constante C tal que

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B w\ d\mu \leq Cw(x),$$

para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$ y para c. t. p. $x \in B$, o, lo que es equivalente,

$$\mathcal{M}_\beta w(x) \leq Cw(x),$$

para c. t. p. de Ω, donde $\mathcal{M}_\beta$ es la *función maximal de Hardy-Littlewood β-local* definida por

$$\mathcal{M}_\beta f(x) = \sup_{B \in \mathcal{F}_\beta : x \in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| d\mu$$

para $x \in \Omega$ y $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Con respecto a la medida μ considerada, cabe indicar que no es difícil ver que si se verifica (1.0.1), dado $s \in (0,1)$, hay una constante C_s tal que

$$\mu(B) \leq C_s \mu(sB), \tag{1.0.2}$$

para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$. Más aún, en [HSV14] se prueba lo siguiente.

Proposición 1.0.3. *(Proposición 3.3, [HSV14]) Dados X y Ω como antes, si μ es una medida de Borel sobre Ω y $0 < \alpha, \beta < 1$, tenemos*

(i) μ es finita y positiva sobre $\mathcal{F}_\beta$ si, y solo si, es finita y positiva sobre $\mathcal{F}_\alpha$.

(ii) μ duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$ si, y solo si, duplica sobre $\mathcal{F}_\alpha$.

También se prueba en el trabajo mencionado que, para todos $0 < \alpha, \beta < 1$ y $1 \leq p < \infty$, $A_p^\beta = A_p^\alpha$, por lo cual, cuando sea conveniente, denotamos $w \in A_p^{loc}$ si $w \in A_p^\beta$ para algún $\beta \in (0,1)$. Además, como sucede con las clases usuales de pesos de Muckenhoupt, estos pesos también satisfacen una propiedad de duplicación: hay una constante C tal que, la medida inducida por w, esto es

$$w(E) = \int_E w \, d\mu$$

para $E \subset \Omega$ medible, satisface (1.0.1) sobre $\mathcal{F}_\beta$.

El interés por estudiar esta clase de pesos, surge de su primera aparición en trabajos de Lin, Nowak y Stempak, [LS10] y [NS06]. Cuando $X = \mathbb{R}$ y $\Omega = (0, \infty)$, el operador maximal local y las clases de pesos correspondientes han sido consideradas por Nowak y Stempak en [NS06]. También, en [HSV14] se cubren los resultados obtenidos en [LS10], los cuales se consiguen en un entorno métrico que, en nuestro caso, corresponde a $X = \mathbb{R}^n$ con la métrica d_∞ ($d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}$) y $\Omega = \mathbb{R}^n - \{0\}$, siendo μ la restricción de la medida de Lebesgue. Allí, los autores basaron su prueba en un lema geométrico construido para el caso específico bajo consideración. Dicho lema les permite resolver el problema extendiendo una restricción de un peso A_p-local a un peso A_p-global para aplicar los conocidos resultados de acotación para el operador maximal usual de Hardy-Littlewood. Tal técnica parece difícil de adaptar a nuestro entorno general y, más aún, hay pesos locales que no son la restricción de algún peso global. Es por ese motivo que resulta interesante estudiar los pesos locales desde un punto de partida inicial, o sea, sin aplicar (en lo posible) el conocimiento previo que se tiene sobre los clásicos pesos de Muckenhoupt.

Volviendo a [HSV14], el objetivo principal allí fue probar que, como sucede en el contexto de las clases A_p usuales, la condición A_p^β caracteriza a los pesos para los cuales el operador $\mathcal{M}_\beta$ es acotado sobre $L^p_w(\Omega)$ (el espacio de funciones L^p en Ω con respecto a la medida inducida por w) cuando $p>1$ y, cuando $p=1$, la condición A_1^β caracteriza a los pesos para los cuales el operador $\mathcal{M}_\beta$ es tipo débil (1,1) con respecto a la medida inducida por w. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.0.4. *(Teorema 1.1, [HSV14]) Sean X, un espacio métrico con PHD, y Ω , un abierto propio de X, con la propiedad de que las bolas contenidas en él son conjuntos conexos. Entonces, dados $\beta\in(0,1)$ y una medida de Borel μ sobre Ω verificando (1.0.1), tenemos*

(i) Hay una constante C tal que

$$w\left(\{x\in\Omega:\mathcal{M}_\beta f(x)>\lambda\}\right)\leq\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1_w(\Omega)},$$

para todos $\lambda>0$ y $f\in L^1_w(\Omega)$, si, y solo si, $w\in A_1^\beta$.

(ii) Dado $p\in(1,\infty)$, hay una constante C tal que

$$\|\mathcal{M}_\beta f\|_{L^p_w(\Omega)}\leq C\|f\|_{L^p_w(\Omega)},$$

para toda $f\in L^p_w(\Omega)$, si, y solo si, $w\in A_p^\beta$.

En el teorema anterior, y en lo subsecuente, si g es una función μ-medible sobre Ω y $E\subset\Omega$ es medible, denotamos $g(E)=\int_E g\,d\mu$. En este punto es importante destacar ciertos lemas y resultados, utilizados para demostrar el Teorema 1.0.4, que aplicaremos en el desarrollo de nuestro trabajo. Para ello, consideremos la siguiente definición.

Definición 1.0.5. *Dados $\beta\in(0,1)$ y $E\subset\Omega$ medible, la* nube de E *es el conjunto*

$$\mathcal{N}_\beta(E)=\bigcup_{B\in\mathcal{F}_\beta:E\cap B\neq\varnothing}B.$$

Lema 1.0.6. *(Cubrimiento tipo Whitney, Lema 2.3, [HSV14]) Sean X, Ω y β como en el Teorema 1.0.4. Entonces, dado $a\in(0,\beta/80)$, existe $\mathcal{W}_a\subset\mathcal{F}_\beta$, cubrimiento de Ω, que verifica*

(i) Si $P=B(x_P,r_P)\in\mathcal{W}_a$, $10P\in\mathcal{F}_\beta$ y

$$\frac{a}{3}\rho\left(x_P\right)<r_P\leq a\rho\left(x_P\right).$$

(ii) Dadas P y P' en $\mathcal{W}_a$, si $P \cap P' \neq \varnothing$ entonces $P' \subset 5P$ y $P \subset 5P'$.

(iii) Hay un $M \in \mathbb{N}$, que solo depende de β y a, tal que, si $B_0 = B(x_0, r_0) \in \mathcal{F}_\beta$, pero $5B_0 \notin \mathcal{F}_\beta$, entonces

$$\mathcal{W}_a(B_0) = \{P \in \mathcal{W}_a : P \cap \mathcal{N}_\beta(B_0) \neq \varnothing\}$$

tiene a lo sumo M elementos. Además, si $P \in \mathcal{W}_a(B_0)$ y $x_0 \in P$, se tiene $P \subset \frac{1}{2}B_0$.

Cabe notar que, si en (iii) del lema anterior, $B_0 \in \mathcal{F}_{\beta/5}$, entonces también resulta

$$\#\mathcal{W}_a(B_0) \leq M,$$

ya que $\mathcal{W}_a(B_0) \subset \mathcal{W}_a(B(x_0, \beta\rho(x_0)))$. También es importante indicar que algunas de las ideas y argumentos de la demostración del Lema 1.0.6 se aplicarán en las demostraciones de nuetros resultados. En particular, tenemos la siguiente observación.

Observación 1.0.7. Para cada $j \in \mathbb{Z}$, denotemos

$$\Omega_j = \left\{x \in \Omega : 2^{j-1} \leq \rho(x) < 2^j\right\}.$$

Entonces, se vé en la demostración del Lema 1.0.6 que existen m y n, números naturales que solo dependen de β, tales que, dada $B_0 = B(x_0, r_0)$, si $x_0 \in \Omega_{k_0}$ se tiene

$$B \subset \bigcup_{j=j_0-m-n}^{j_0+m+1} \Omega_j,$$

para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$ que verifica $B_0 \cap B \neq \varnothing$. Luego, se deduce

$$\mathcal{N}_\beta(B_0) \subset \bigcup_{j=j_0-m-n}^{j_0+m+1} \Omega_j,$$

esto es, si $x \in \mathcal{N}_\beta(B_0)$ hay un j tal que $j_0 - m - n \leq j \leq j_0 + m + 1$ y $x \in \Omega_j$, por lo que

$$\rho(x) < 2^j \leq 2^{j_0+m+1} \leq 2^{m+2}\rho(x_0)$$

y

$$\rho(x_0) < 2^{j_0} \leq 2^{j+m+n} \leq 2^{m+n+1}\rho(x).$$

Así, obtuvimos que hay una constante $C_\beta > 1$, que depende solo de β, verificando

$$C_\beta^{-1}\rho(x_0) < \rho(x) < C_\beta\rho(x_0),$$

para todo $x \in \mathcal{N}_\beta(B_0)$.

Como una consecuencia del Lema 1.0.6 tenemos el siguiente resultado, el cual aplicaremos reiteradamente en el desarrollo de este trabajo.

Lema 1.0.8. *(Lema 3.1, [HSV14]) Sean X, Ω y β como en el Teorema 1.0.4, y $C_{\mu,\beta}$ una constante que verifica*

$$\mu(B) \leq C_{\mu,\beta}\mu\left(\frac{1}{5}B\right),$$

para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$. Entonces, dados $a \in (0, \beta/80)$ y $B_0 \in \mathcal{F}_\beta$, tenemos

(i) Si M y $\mathcal{W}_a(B_0)$ son como en (iii) del Lema 1.0.6, resulta

$$\mu(P) \leq C_{\mu,\beta}^M \mu(P')$$

para todos P y P' en $\mathcal{W}_a(B_0)$.

(ii) Si $B_0 \notin \mathcal{F}_{\beta/5}$, hay una constante C, independiente de B_0, tal que

$$\mu\left(\mathcal{N}_\beta(B_0)\right) \leq C\mu\left(\frac{1}{2}B_0\right).$$

Observación 1.0.9. La desigualdad anterior tiene una generalización útil. Dado un número entero $N \geq 2$, sea C_N una constante que verifica (1.0.2) para $s = 1/N$. Entonces, si $B(x,r) \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\beta/N}$, por (ii) del Lema 1.0.8, tenemos

$$\begin{aligned}
\mu\left(\mathcal{N}_\beta(B(x,r))\right) &\leq \mu\left(\mathcal{N}_\beta(B(x,\beta\rho(x)))\right) \\
&\leq C\mu\left(B(x,\beta\rho(x))\right) \\
&\leq CC_N\mu\left(B\left(x,\frac{\beta}{N}\rho(x)\right)\right) \\
&\leq CC_N\mu\left(B(x,r)\right).
\end{aligned}$$

En la demostración del Lema 1.0.6 se usa una versión local de un muy bien conocido lema de cubrimiento.

Lema 1.0.10. *(Cubrimiento de Vitali local, Lema 2.2, [HSV14]) Sean X, espacio métrico separable, y $\Omega \subset X$, abierto propio no vacío. Consideremos $\beta \in (0,1)$ y $\Gamma \subset \mathcal{F}_\beta$ tal que*

$$\sup_{B\in\Gamma} r_B < \infty,$$

donde r_B denota el radio de una bola B. Entonces, hay una subfamilia $\Lambda \subset \Gamma$, disjunta y a lo sumo numerable, tal que

$$\bigcup_{B\in\Gamma} B \subset \bigcup_{B\in\Lambda} \widetilde{B},$$

donde $\widetilde{B} = 5B$, si $B \in \mathcal{F}_{\beta/5}$, y $\widetilde{B} = \mathcal{N}_\beta(B)$, si $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\beta/5}$.

Cabe mencionar que el hecho de que sea posible aplicar el Lema 1.0.10 en la demostración del Lema 1.0.6 se debe a que un espacio con PHD es separable. Esto último no es difícil de ver con la siguiente observación.

Observación 1.0.11. Dado un espacio métrico (o casi-métrico) (X,d) con PHD, por definición, hay un $N \in \mathbb{N}$ ($N \geq 2$) tal que, para todos $x_0 \in X$ y $r > 0$,

$$\#\{x, y \in B(x_0, r) : d(x,y) \geq r/2\} \leq N,$$

donde # denota el número de elementos de un conjunto finito. Luego, hay una red maximal de puntos en cada bola $B(x_0,r)$ con distancia de uno a otro no menor a $r/2$, o sea, existen x_1, x_2, ..., x_{m_1} en $B(x_0,r)$, con $m_1 \leq N$, tales que $d(x_i,x_j) \geq r/2$, para $i \neq j$, y si $d(x,x_0) < r$ y $x \neq x_j$, para cada j, entonces $d(x,x_i) < r/2$ para algún i. Así, deducimos que

$$B(x_0,r) \subset \bigcup_{j=1}^{m_1} B(x_j, r/2).$$

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de puntos en $B(x_0,r)$ con distancia de uno a otro no menor a $r/4$. Si $\mathcal{A} \cap B(x_0,r)$ tiene más de un elemento, por la PHD tenemos

$$\#\mathcal{A} \cap B(x_j, r/2) \leq \# \left\{x, y \in B(x_j, r/2) : d(x,y) \geq \frac{r/2}{2}\right\} \leq N$$

para cada j, por lo que

$$\#\mathcal{A} \leq \sum_{i=1}^{m_1} \#\mathcal{A} \cap B(x_i, r/2) \leq N^2.$$

Ahora, inductivamente, supongamos que, dado $n \in \mathbb{N}$,

$$\#\{x, y \in B(x_0, r) : d(x,y) \geq r/2^n\} \leq N^n.$$

Entonces, hay una red maximal de puntos x_1, x_2, ..., x_{m_n} en $B(x_0,r)$ con $m_n \leq N^n$ y $d(x_i,x_j) \geq r/2^n$ para $i \neq j$. Así resulta

$$B(x_0,r) \subset \bigcup_{j=1}^{m_n} B(x_j, r/2^n).$$

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de puntos en $B(x_0,r)$ con distancia de uno a otro no menor a $r/2^{n+1}$. Si $\mathcal{A} \cap B(x_0,r)$ tiene más de un elemento, por la PHD tenemos

$$\#\mathcal{A} \cap B(x_j, r/2^n) \leq \# \left\{x, y \in B(x_j, r/2^n) : d(x,y) \geq \frac{r/2^n}{2}\right\} \leq N$$

para cada j, por lo que

$$\#\mathcal{A} \leq \sum_{i=1}^{m_n} \#\mathcal{A} \cap B(x_i, r/2^n) \leq N^{n+1}.$$

Por lo tanto, probamos que, para todos $x_0 \in X$, $r > 0$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\#\{x, y \in B(x_0, r) : d(x,y) \geq r/2^n\} \leq N^n.$$

En particular, de lo anterior se deduce que siempre podemos encontrar puntos x_1, x_2, ..., x_{m_n} en $B(x_0,r)$, con $m_n \leq N^n$, tales que

$$B(x_0,r) \subset \bigcup_{j=1}^{m_n} B(x_j, r/2^n).$$

Continuando con el desarrollo teórico del Análisis Armónico vinculado a las clases A_p^β, en [HSV19], Harboure, Salinas y Viviani estudiaron operadores integrales singulares relacionados con las familias de bolas β-locales: A saber, un operador T es un *operador integral singular β-local* si T es acotado sobre $L^2(\Omega, d\mu)$ y tiene un *núcleo* K, el cual es una función real valorada definida en $\Omega \times \Omega - \{(x,x) : x \in \Omega\}$, localmente integrable y que verifica

1. Dada $f \in L_c^\infty(\Omega)$, tenemos

$$Tf(x) = \int_\Omega K(x,y) f(y) d\mu(y),$$

   en c. t. p. $x \notin \text{sop}(f)$, y $Tf(x) = 0$ si $\text{sop}(f) \cap B(x, \beta\rho(x)) = \varnothing$.

2. Existen constantes positivas C y ε, tales que

$$|K(x,y)| \le \frac{C}{\mu(B(x, d(x,y)))},$$

   para $x \neq y$, y

$$|K(x,y) - K(x',y)| + |K(y,x) - K(y,x')| \le \frac{C}{\mu(B(x,d(x,y)))} \left(\frac{d(x,x')}{d(x,y)} \right)^\varepsilon,$$

   para todos x, x' e y que satisfacen $d(x,x') < \frac{1}{2} d(x,y)$.

El siguiente teorema se deduce de los resultados probados en [HSV19] (Teorema 2.1, Proposición 3.3 y Corolario 3.4).

Teorema 1.0.12. *([HSV19]) Un operador integral singular β-local es acotado sobre $L_w^p(\Omega)$, para $1 < p < \infty$, si $w \in A_p^\beta$ y es de tipo débil (1,1) si $w \in A_1^\beta$.*

Ahora bien, la primera parte de esta tesis tendrá como objetivo continuar con el estudio de las propiedades de los pesos A_p locales y las acotaciones de las integrales singulares locales sobre espacios relacionados a estos pesos, extendiendo así, de alguna manera, los resultados mencionados. De este modo, en el Capítulo 2 consideramos la clase de pesos A_∞^β, dada por

$$A_\infty^\beta = \bigcup_{1 \le p < \infty} A_p^\beta,$$

para $0 < \beta < 1$. También, como indicamos antes, podemos denotar a esta clase como A_∞^{loc}, ya que, para todos $0 < \alpha, \beta < 1$, $A_\infty^\beta = A_\infty^\alpha$. Lo primero en lo que estaremos interesados será en obtener caracterizaciones para estos pesos como las del Teorema 1 en [Fuj77]. Esto es, a grandes rasgos, una caracterización a través de la función maximal β-local cuando nuestro ámbito geométrico sea un espacio métrico general, a la cual se agregará una caracterización a través de *transformadas de Riesz β-locales* cuando el espacio sea el euclídeo usual. Luego, siguiendo lo hecho en [Fuj77], conseguiremos una acotación para integrales singulares β-locales de la forma

$$\|Tf\|_{BMO_w^\beta} \leq C \|f/w\|_{L^\infty},$$

donde $w \in A_\infty^{loc}$ es un peso satisfaciendo una condición extra sobre su integrabilidad y BMO_w^β es un espacio tipo BMO vinculado a w. Por otra parte, cuando el espacio sea el euclídeo usual, reemplazaremos T por una transformada de Riesz β-local y la desigualdad anterior caracterizará a la clase de pesos locales involucrados. La condición de integrabilidad a la que nos referimos es una modificación de la considerada por Muckenhoupt y Wheeden (en [MW76]) al estudiar este tipo de acotaciones para el caso no local de la transformada de Hilbert en el ambiente euclídeo usual. Cabe mencionar que esta clase fue luego considerada también por Fujii en [Fuj77].

En este punto es importante destacar que en el Capítulo 2 usaremos también las ideas y argumentos en las demostraciones de los resultados en [HSV19]. En particular, la estrategia más notable allí fue notar que el espacio métrico considerado es equivalente a un espacio casi-métrico con una propiedad sobre las bolas, a la que llamaron propiedad $\mathcal{P}$, que permite convertir a cada bola en un *espacio de tipo homogéneo.*

Definición 1.0.13. *Sea X un conjunto no vacío con más de un elemento. Una función $d : X \times X \to [0, \infty)$ es una casi-métrica si satisface*

(i) $d(x, y) = d(y, x)$ para todos x e y en X.

(ii) $d(x, y) = 0$ si, y solo si, $x = y$.

(iii) Hay una constante $\kappa \geq 1$ tal que

$$d(x, y) \leq \kappa(d(x, z) + d(z, y))$$

para todos x, y y z en X. Luego, decimos que (X, d) es un espacio casi-métrico con constante triangular κ. Si además tenemos que hay una medida μ definida sobre una σ-álgebra que contiene a las d-bolas de X y satisface (1.0.1), para toda d-bola, decimos que (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo.

Por una d-bola, nos referimos al conjunto

$$B_d(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

para $x \in X$ y $r > 0$. En [MS79], los autores probaron que, para toda casi-métrica d, hay una métrica δ y constantes positivas C y α, tales que

$$C^{-1}\delta(x, y)^\alpha \leq d(x, y) \leq C\delta(x, y)^\alpha,$$

para todos x e y en X. En particular, este notable hecho muestra que toda casi-métrica es equivalente a otra casi-métrica, digamos d', tal que las d'-bolas son conjuntos abiertos. Un resultado similar, y también de profunda importancia, fue probado por los mismos autores en [MS80]:

Teorema 1.0.14. *(Teorema 2.7, [MS80]) Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo con constante triangular κ. Entonces, se puede construir una casi-métrica δ que verifica*

$$\delta(x, y) \leq d(x, y) \leq 3\kappa^2\delta(x, y),$$

para todos x e y en X, y además hay una constante C tal que, si $x \in X$, $R > 0$, $0 < r \leq 2\kappa R$ e $y \in B_\delta(x, R)$, se tiene

$$\mu\left(B_\delta(y, r)\right) \leq C\mu\left(B_\delta(x, R) \cap B_\delta(y, r)\right).$$

Observación 1.0.15. En realidad, para demostrar el teorema anterior, Macías y Segovia probaron que, para el espacio casi métrico (X, δ), hay una constante $\sigma \in (0, 1)$ tal que, si x, R, r e y son como antes, hay un $z \in X$ que verifica

$$B_\delta(z, \sigma r) \subset B_\delta(x, R) \cap B_\delta(y, r).$$

Ésta es la propiedad a la que, como en [HSV19], llamaremos propiedad $\mathcal{P}$. Es fácil ver que la propiedad $\mathcal{P}$ implica la desigualdad del teorema anterior y que, además, cada δ-bola con la casi-métrica y la medida inducidas sobre ella por δ y μ, respectivamente, es un espacio de tipo homogéneo donde las constantes triangular y de duplicación dependen de las dadas por el espacio original, por lo que son las mismas para cada δ-bola.

El trabajo de esta tesis se desarrollará, en general, en espacios donde se satisfaga la *propiedad de diferenciación de Lebesgue*, esto es, que cumplan con lo expresado en la siguiente definición.

Definición 1.0.16. *Sean (X, d) espacio métrico, $\Omega \subset X$ abierto propio no vacío y μ medida de Borel sobre Ω. Diremos que en el espacio métrico medible $(\Omega, d|_\Omega, \mu)$ hay diferenciación de Lebesgue si existe L subconjunto medible de Ω tal que $\mu\left(\Omega - L\right) = 0$ y, para todo $x \in L$, hay un $r_x > 0$ verificando que, si $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una familia de bolas tales que $B_{j+1} \subset B_j \subset B(x, r_x)$ y $\{x\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k$, tenemos*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{\mu\left(B_j\right)} \int_{B_j} \left|f\left(y\right) - f\left(x\right)\right| d\mu\left(y\right) = 0,$$

para toda $f \in L^1_{loc}\left(\Omega\right)$. Los elementos del conjunto L se llamarán puntos de diferenciación de Lebesgue.

Poniendo condiciones más fuertes sobre el espacio métrico (X, d) se puede conseguir que se verifique la Definición 1.0.16. En particular, por el Teorema 3.14 en [AM15] página 93, si suponemos que hay una medida de Borel μ sobre (X, d) la cual duplica sobre bolas y $\mathcal{C}_c(X)$, el espacio de las funciones continuas en (X, d) con soporte acotado, es denso en $L^p(X, d\mu)$, para todo $p \in [1, \infty)$, entonces se verifica la Definición 1.0.16 para μ. Más precisamente, considerando solo espacios métricos por simplicidad, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.0.17. *(Teorema 3.14, [AM15]) Sea (X, d) un espacio métrico en el cual hay definida una medida de Borel μ que duplica sobre bolas. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) μ es Borel-semiregular.

(ii) Para toda $f \in L^1_{loc}$ se tiene

$$\lim_{r\to 0^+} \mu(B(x,r))^{-1} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| d\mu(y) = 0$$

para c. t. p. $x \in X$.

(iii) Para toda $f \in L^1_{loc}$ se tiene

$$\lim_{r\to 0^+} \mu(B(x,r))^{-1} \int_{B(x,r)} f(y) d\mu(y) = f(x)$$

para c. t. p. $x \in X$.

(iv) Para todo $\alpha \in (0, 1]$, el espacio de las funciones Lipschitz α en X con soporte acotado es denso en $L^p(X, d\mu)$, para todo $p \in [1, \infty)$.

(v) El espacio de las funciones continuas en X con soporte acotado es denso en $L^p(X, d\mu)$, para todo $p \in [1, \infty)$.

En (i) del teorema anterior, una medida de Borel μ sobre (X, d) es *Borel-semiregular* si, para todo E conjunto μ-medible con $\mu(E) < \infty$, hay un conjunto de Borel A tal que $\mu((E - A) \cup (A - E)) = 0$.

Ahora, en el contexto más general que consideraremos para nuestros resultados (X, Ω y μ como en el Teorema 1.0.4) podremos aplicar el siguiente teorema.

Teorema 1.0.18. *(Teorema de Diferenciación de Lebesgue, Teorema 1.8, [Hei01]) Sea (X, d) un espacio métrico en el cual hay definida una medida regular de Borel μ que duplica sobre bolas. Entonces, para toda $f \in L^1_{loc}$, no-negativa, se tiene*

$$\lim_{r\to 0^+} \mu(B(x,r))^{-1} \int_{B(x,r)} f(y) d\mu(y) = f(x)$$

para c. t. p. $x \in X$.

Observación 1.0.19. Siendo X, Ω y μ como en el Teorema 1.0.4, si además (X, d) tiene la propiedad $\mathcal{P}$ y μ es regular, se tiene la propiedad de diferenciación de Lebesgue. En efecto, como veremos en el Lema 3.2.2, para cada bola $B \in \mathcal{F}_{\beta/3}$, $(B, d|_B, \mu|_B)$ es un espacio (métrico) de tipo homogéneo. Así, si $\{P_j\} \subset \mathcal{F}_{\beta/85}$ es un cubrimiento tipo Whitney para Ω dado por el Lema 1.0.6, cada P_j es un espacio métrico que verifica las hipótesis del Teorema 1.0.18, por lo que, para toda $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, no-negativa, se tiene

$$\lim_{r\to 0^+} \mu(B(x,r))^{-1} \int_{B(x,r)} f|_{P_j} \, d\mu = f(x)$$

en c. t. p. $x \in P_j$, para cada j. Entonces, como $\Omega = \cup P_j$, por el Teorema 1.0.17 tenemos

$$\lim_{r\to 0^+} \mu(B(x,r))^{-1} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| d\mu(y) = 0$$

para toda $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ y en c. t. p. $x \in \Omega$.

Otro hecho notable que queremos destacar es que, así como en el contexto euclídeo la descomposición de ciertos subconjuntos del espacio en cubos diádicos con propiedades específicas nos permite demostrar algunos de los resultados clásicos del Análisis Armónico, en espacios de tipo homogéneo podemos copiar esta técnica gracias a que, para un espacio casi-métrico (X, d) con propiedad de homogeneidad débil, siempre se puede construir una familia $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X los cuales juegan el rol de los cubos diádicos en los espacios euclídeos. Sabemos que disponemos de un tal sistema diádico $\mathcal{D}$ por los resultados dados, por ejemplo, en [HK12]. Según ese trabajo (y otros como el de [Chr90]), en nuestro espacio métrico mediante la propiedad de homogeneidad débil, podemos construir un sistema con la siguiente estructura.

Observación 1.0.20. De acuerdo al Teorema 2.2 de [HK12], en nuestro contexto, dados $j \in \mathbb{Z}$ y $0 < \delta < 1/12$, existe una familia de conjuntos

$$\mathcal{D}_j = \left\{ Q^j_k : k \in \mathcal{K}(j) \right\},$$

(la familia de los conjuntos diádicos en el nivel j) donde $\mathcal{K}(j) \subset \mathbb{N}$ (que podría ser todo $\mathbb{N}$) es una familia de índices que se construye de tal manera que los elementos de $\mathcal{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_j$ cumplen propiedades similares a la de los cubos diádicos, esto es

1. Existen $a \in (0,1)$ y $A \in (1,\infty)$ tales que, para cada $Q^j_k \in \mathcal{D}_j$ hay un $x^j_k \in X$ que verifica
$$B\left(x^j_k, a\delta^j\right) \subset Q^j_k \subset B\left(x^j_k, A\delta^j\right).$$
2. Si $Q^j_k \in \mathcal{D}_j$ y $Q^i_l \in \mathcal{D}_i$, con $i \leq j$, son tales que $Q^j_k \subset Q^i_l$, entonces
$$B\left(x^j_k, A\delta^j\right) \subset B\left(x^i_l, A\delta^i\right).$$
3. Para todos $j \in \mathbb{Z}$,$k \in \mathcal{K}(j)$, $i < j$, hay un único $l \in \mathcal{K}(i)$ que verifica $Q^j_k \subset Q^i_l$.
4. Si $i < j$, para todos $k \in \mathcal{K}(j)$ y $l \in \mathcal{K}(i)$, se tiene $Q^j_k \subset Q^i_l$ (estrictamente) o $Q^j_k \cap Q^i_l = \varnothing$.
5. Hay un $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $j \in \mathbb{Z}$ y $l \in \mathcal{K}(j-1)$, se verifica
$$\#\left\{k \in \mathcal{K}(j) : Q^j_k \subset Q^{j-1}_l\right\} \leq n.$$
6. Para todos $j \in \mathbb{Z}$, $k, l \in \mathcal{K}(j)$, si $k \neq l$ entonces $Q^j_k \cap Q^j_l = \varnothing$.

7. Para cada $j \in \mathbb{Z}$,
$$\bigcup_{k \in \mathcal{K}(j)} Q_k^j = X.$$

8. X es acotado si, y solo si, existen $j \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathcal{K}(j)$ tales que $X = Q_k^j$.

Esta construcción será útil en el Capítulo 2 cuando probemos que pesos de Muckenhoupt locales también satisfacen una desigualdad tipo Hölder inversa, esto es, un resultado similar al del siguiente teorema, probado por Coifman y Fefferman (en [CF74]) en el contexto euclídeo usual.

Teorema 1.0.21. *(Desigualdad de Hölder inversa,Teorema IV, [CF74] página 246) Sean $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$. Entonces, existen constantes positivas C y δ tales que*
$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\delta} dx\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q w \, dx,$$
para todo cubo Q de lados paralelos a los ejes coordenados.

Este resultado fue generalizado en el contexto de espacios de tipo homogéneo (ver, por ejemplo, [MS80] y [ABI05]). En este trabajo probaremos que una desigualdad como la anterior también es válida para pesos de Muckenhopt locales sobre bolas de $\mathcal{F}_\beta$.

En el Capítulo 3 consideramos el contexto euclídeo ($X = \mathbb{R}^n$, d la distancia euclídea y μ la medida de Lebesgue) y obtenemos una estimación *a priori* interior sobre un dominio Ω (abierto de $\mathbb{R}^n$ conexo y acotado), para ciertos operadores diferenciales elípticos, con normas en un espacio BMO relacionado a un peso A_p local sobre Ω. Con este objetivo en mente, estudiamos la acotación en tales normas de los conmutadores de ciertas integrales singulares locales con un multiplicador en un subespacio adecuado del espacio BMO considerado. Entonces, tal acotación se extiende a integrales singulares locales con núcleo variable. Cabe mencionar que estas estimaciones son nuevas en espacios BMO con peso y además se obtienen para clases de pesos más amplias que las clases A_p usuales.

En relación con los resultados antes mencionados, recordemos que dado un operador integral singular (no-local) T y una función $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, se define su *Conmutador* T_b por
$$T_b f = bTf - T(bf).$$
Uno de los primeros trabajos en los que se estudió acotaciones de estos operadores fue el de Coifman, Rochberg y Weiss, [CRW76], donde se prueba que si $1 < p < \infty$ y $b \in BMO$, existe una constante C tal que
$$\|T_b f\|_p \leq C \|b\|_{BMO} \|f\|_p,$$
para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Por otro lado, también fue de interés estudiar estimaciones como la anterior sobre espacios BMO vinculados a un peso. En ese sentido, y más próximo

a nuestra investigación en esta tesis, cabe mencionar algunos resultados obtenidos en [FFRV20].

Dada una función $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, si hay una constante C tal que

$$\int_r^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \leq C \frac{\varphi(r)}{r},$$

para todo $r > 0$, se denota $\varphi \in \mathcal{W}_\infty$. Luego, dada $\varphi \in \mathcal{W}_\infty$, no-decreciente y tal que, para alguna constante C, $\varphi(2t) \leq C\varphi(t)$ para todo $t > 0$, consideremos un peso v tal que, para $1 < p < \infty$, $v^{p'}$es un peso de la clase A_1 de Muckenhoupt. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ se definen

$$\|f\|_{BMO_\varphi(v)} = \sup_{B=B(x,r)} \frac{1}{v(B)\varphi(r)} \int_B |f - f_B|\, dy$$

y

$$\|f\|_{BMO^p_\varphi(v)} = \|f\|_{BMO_\varphi(v)} + \|f/v\|_p\,.$$

Denotemos $BMO_\varphi(v)$ y $BMO^p_\varphi(v)$ a los espacios de funciones cuyas respectivas cantidades anteriores son finitas (notar que tomando $v = \varphi = 1$ tenemos el espacio BMO clásico). Además, dada una función $\Phi : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to (0,\infty)$, si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ se define

$$\begin{aligned} \|f\|_{LMO_\Phi} &= \sup_{B=B(x,r),\ r<1/4} \frac{1}{\Phi(x,r)|B|} \int_B |f - f_B|\, dy \\ &\quad + \sup_{B=B(x,r),\ r\geq 1/4} \frac{1}{|B|} \int_B |f - f_B|\, dy, \end{aligned}$$

siendo LMO_Φ el espacio de funciones cuya cantidad anterior es finita. Ahora, con estos espacios y considerando $\omega(x,r) = v(B(x,r))\varphi(r)r^{-n}$ para $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, definimos

$$\Omega(x,r) = \frac{\omega(x,r)}{\int_r^1 \frac{\omega(x,t)}{t} dt + \omega(x,1)},$$

si $r < 1$, y $\Omega(x,r) = 1$ para $r \geq 1$. Entonces, mediante una extensión adecuada de un operador integral singular para que éste pueda estar bien definido (en c. t. p.) en $BMO^p_\varphi(v)$, en [FFRV20] se prueba el siguiente resultado.

Teorema 1.0.22. *(Teorema 1.13, [FFRV20]) Con las notaciones anteriores, se tienen*

(a) Dado un operador integral singular T, si para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\Omega(x,\cdot) \in \mathcal{W}_\infty$, con una constante independiente de x, y $b \in LMO_\Omega$, hay una constante C, independiente de b, tal que

$$\|T_b f\|_{BMO^p_\varphi(v)} \leq C\, \|b\|_{LMO_\Omega}\, \|f\|_{BMO^p_\varphi(v)}\,.$$

(b) Si $b \in BMO$ y, para cada $j = 1, \ldots, n$, hay una constante C tal que

$$\left\|(R_j)_b f\right\|_{BMO^p_\varphi(v)} \leq C\, \|f\|_{BMO^p_\varphi(v)}\,,$$

donde R_j denota la j-ésima transformada de Riesz, entonces $b \in LMO_\Omega$.

Tenemos también el siguiente corolario del teorema anterior.

Corolario 1.0.23. *(Corolario 1.14, [FFRV20]) Si* $\varphi = 1$, $\Omega(x,\cdot) \in \mathcal{W}_\infty$, *con una constante independiente de* x, *y* $b \in LMO_{(|\log(\cdot)|+1)^{-1}}$, *tenemos*

$$\|T_b f\|_{BMO_1^p(v)} \leq C \|b\|_{LMO_{(|\log(\cdot)|+1)^{-1}}} \|f\|_{BMO_1^p(v)}.$$

Cabe mencionar también que la estimación dada en el corolario anterior para el conmutador T_b con $b \in LMO_{(|\log(\cdot)|+1)^{-1}}$, fue estudiada en [SS05] para $v = \varphi = 1$.

En este trabajo obtendremos versiones locales de los resultados antes mencionados que serán útiles para conseguir estimaciones *a priori* de operadores diferenciales en derivadas parciales de primer y segundo orden. Como en [SS06] y [CFL91], consideremos el operador elíptico L definido por

$$Lu(x) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \tag{1.0.24}$$

en c. t. p. de $\mathbb{R}^n$, donde los coeficientes $a_{i,j}$ satisfacen las siguientes propiedades:

$$a_{i,j} = a_{j,i}$$

para todos i, j, y hay una constante $\nu \in (0, 1]$ tal que

$$\nu|\xi|^2 \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \leq \nu^{-1}|\xi|^2,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ y c. t. p. $x \in \mathbb{R}^n$. Recordamos que cuando los coeficientes $a_{i,j}$ son al menos uniformemente continuos, los resultados de existencia y unicidad junto con las estimaciones *a priori* de $W^{2,p}$, con $1 < p < \infty$, son bien conocidos (ver [GT83], página 235). Además, la teoría de operadores con coeficientes discontinuos pertenecientes al espacio VMO se remonta a los años 90, con los trabajos de Chiarenza, Frasca y Longo ([CFL91]) para operadores elípticos, y Bramanti y Cerutti ([BCC93]) para el caso parabólico, donde se obtuvo una estimación de $W_p^{1,2}$ y los resultados de existencia y unicidad derivados de ella. En particular, queremos destacar algunos de los resultados de [CFL91] en los cuales nos apoyamos para obtener los nuestros en el Capítulo 3.

Sea Γ la función sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que, para c. t. p. x_0, la aplicación $y \longmapsto \Gamma(x_0, y)$ es la solución fundamental de $L_{x_0} = \sum\limits_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}(x_0)\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}$. Denotemos también

$$\Gamma_i(x, y) = \frac{\partial \Gamma}{\partial y_i}(x, y), \qquad \Gamma_{i,j}(x, y) = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y_i \partial y_j}(x, y).$$

Es sabido que las derivaciones $\Gamma_{i,j}(x, y)$ son núcleos de C-Z en la variable y. Ahora, en [CFL91] tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.0.25. *(Teorema 3.1, [CFL91]) Sean* $n \geq 3$, B *una bola de* $\mathbb{R}^n$ *y* $u \in W_0^{2,p}(B)$ *con* $1 < p < \infty$. *Entonces, para c. t. p.* $x \in B$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \quad = \quad v.p. \int_B \Gamma_{i,j}(x, x-y) \sum_{1\leq h,k\leq n} (a_{h,k}(x) - a_{h,k}(y)) \frac{\partial^2 u}{\partial y_h \partial y_k}(y)dy$$

$$+v.p. \int_B \Gamma_{i,j}(x, x-y) Lu(y) dy + Lu(x) \int_{S^{n-1}} \Gamma_i(x,y) y_j d\sigma(y).$$

En el teorema anterior, si Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$, $W^{2,p}(\Omega)$ es el espacio de Sobolev de las funciones $u \in L^p(\Omega)$ tales que, para $1 \leq i, j \leq n$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ están en $L^p(\Omega)$, siendo estas últimas, derivadas de u en el sentido débil. Una norma en este espacio se define mediante la expresión

$$\|u\|^p_{W^{2,p}(\Omega)} = \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{1 \leq i \leq n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{1 \leq i,j \leq n} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

Luego, $W^{2,p}_0(\Omega)$ es el espacio de las funciones $u \in W^{2,p}(\Omega)$ para las cuales hay una sucesión $\{u_m\}$ de funciones $\mathcal{C}^\infty$ con soporte compacto contenido en Ω tal que

$$\lim_{m \to \infty} \|u - u_m\|_{W^{2,p}(\Omega)} = 0.$$

Cabe destacar que el teorema anterior es consecuencia de considerar el siguiente resultado de [Lor72].

Sea $A = (c_{i,j})$ una matriz $n \times n$ simétrica y de coeficientes constantes para la cual hay un $\lambda > 0$ tal que

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} c_{i,j} \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2,$$

para todo $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Consideremos el operador diferencial

$$\mathcal{L} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} c_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{1 \leq i \leq n} c_i \frac{\partial}{\partial x_i} - c_{n+1}$$

con $c_1, \ldots, c_{n+1}$ números reales y $c_{n+1} \geq 0$. Denotando por E a la solución fundamental de $\mathcal{L}$, podemos ahora enunciar el resultado citado.

Lema 1.0.26. *(Lema 2, [Lor72]) Si $1 < p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, se tienen*

(i) $E * f \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\mathcal{L}(E * f) = f$.

(iii) $\|E * f\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, *con C independiente de f.*

Notar que, en nuestro caso, $c_1 = \cdots = c_{n+1} = 0$ y, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fijo, $c_{i,j} = a_{i,j}(x_0)$ y $E = \Gamma(x_0, \cdot)$. Volviendo a [CFL91], se denota VMO al espacio de funciones $f \in BMO$ tales que

$$\lim_{r \to 0} \sup_{B(x,s),\ s \leq r} |B(x,s)|^{-1} \int_{B(x,s)} \left| f - f_{B(x,s)} \right| dy = 0.$$

El principal resultado de [CFL91] es el siguiente.

Teorema 1.0.27. *(Teorema 4.2, [CFL91]) Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y consideremos el operador L en (1.0.24) donde además los coeficiente $a_{i,j}$ están en $VMO \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Entonces, dados $1 < q \leq p < \infty$ y $u \in W^{2,q}_{loc}(\Omega)$ tal que $Lu \in L^p_{loc}(\Omega)$, se tiene $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$. Más aún, dados Ω' y Ω'', abiertos acotados, tales que $\overline{\Omega'} \subset \Omega''$ y $\overline{\Omega''} \subset \Omega$, resulta*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leq C\left(\|u\|_{L^p(\Omega'')} + \|Lu\|_{L^p(\Omega'')}\right)$$

donde C es independiente de u pero depende de n, ν, p, $dist(\Omega', \partial\Omega'')$, los coeficientes $a_{i,j}$ y

$$M = \max_{1\leq i,j\leq n} \max_{|\alpha|\leq 2n} \left\| \frac{\partial^\alpha \Gamma_{i,j}}{\partial y^\alpha} \right\|_{L^\infty(\Omega\times S^{n-1})}.$$

En el teorema de arriba, $W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ denota el espacio de las funciones u tales que, para todo abierto Ω' tal que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, $u \in W^{2,p}(\Omega')$. El siguiente lema es esencial para demostrar el teorema anterior.

Lema 1.0.28. *(Lema 4.1, [CFL91]) Bajo las hipótesis del teorema anterior, dado $1 < p < \infty$, existen constantes C y r_0, que dependen de n, ν, p, los coeficientes $a_{i,j}$ y M, tales que, para toda bola $B(x_0, r)$, con $r < r_0$ y $\overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$, y toda $u \in W^{2,p}_0(B(x_0, r))$, se tiene*

$$\max_{1\leq i,j\leq n} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq C \|Lu\|_{L^p(B(x_0,r))}.$$

Siguiendo la misma línea de [CFL91], en [SS06] se obtuvieron estimaciones *a priori* interiores en cierto tipo de espacios de Hardy. Efectivamente, Sun y Su consideraron nuevamente el operador diferencial elíptico L como en (1.0.24), con las mismas condiciones para los coeficientes $a_{i,j}$. Sin embargo, ellos tomaron el espacio LMO, el cual es el espacio de funciones $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tales que, la cantidad

$$\begin{aligned} \|f\|_{LMO} &= \sup_{B=B(x,r),\ r<1} \frac{1+|\ln r|}{|B|} \int_B |f - f_B|\, dy \\ &\quad + \sup_{B=B(x,r),\ r\geq 1} \frac{1}{|B|} \int_B |f - f_B|\, dy, \end{aligned}$$

es finita. Luego, introdujeron el espacio LMO_0, esto es, el espacio de funciones $f \in LMO$ tales que

$$\lim_{r\to 0} \sup_{B(x,s),\ s\leq r} \frac{1+|\ln s|}{|B(x,s)|} \int_{B(x,s)} \left|f - f_{B(x,s)}\right| dy = 0.$$

Además, dada una función $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_0$ con $\operatorname{sop}(\varphi) \subset B(0,1)$, $\varphi \geq 0$ y $\int \varphi\, dx = 1$, definieron

$$m_\varphi f(x) = \sup_{0<t<1} |(f * \varphi_t)(x)|,$$

con $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(t^{-1}x)$, y el espacio de Hardy local

$$h^1(\mathbb{R}^n) = h^1 = \left\{f \in L^1 : m_\varphi f \in L^1\right\}.$$

También, dado un dominio Ω de $\mathbb{R}^n$ (abierto conexo), Sun y Su definieron

$$h^1(\Omega) = \left\{ f \in L^1(\Omega) : f = F|_\Omega \text{ para alguna } F \in h^1 \right\}$$

y

$$\|f\|_{h^1(\Omega)} = \text{ínf} \left\{ \|F\|_{h^1} : f = F|_\Omega \text{ y } F \in h^1 \right\}.$$

Posteriormente, consideraron el espacio de Sobolev-Hardy $h^{2,1}(\Omega)$, es decir, el espacio de funciones $u \in h^1(\Omega)$ tales que, para $1 \leq i, j \leq n$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ están en $h^1(\Omega)$, siendo estas últimas derivadas débiles de u. Con estas definiciones, en [SS06] se obtuvieron los siguientes resultados.

Teorema 1.0.29. *(Teorema 5.1, [SS06]) Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ y consideremos el operador L en (1.0.24) donde además los coeficiente $a_{i,j}$ están en $LMO_0 \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\max_{1 \leq i,j \leq n} \left(\|a_{i,j}\|_\infty + \|a_{i,j}\|_{LMO} \right) \leq \nu^{-1}.$$

Entonces, dada $u \in h^{2,1}(\Omega)$, para todo Ω', abierto conexo tal que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, resulta

$$\left\| \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{h^1(\Omega')} \leq C \left(\|u\|_{h^1(\Omega)} + \|\nabla u\|_{h^1(\Omega)} + \|Lu\|_{h^1(\Omega)} \right),$$

donde C es independiente de u pero depende de n, ν, p, Ω, Ω' y los coeficientes $a_{i,j}$.

La siguiente proposición es esencial para demostrar el teorema anterior.

Proposición 1.0.30. *(Proposición 5.1, [SS06]) Bajo las hipótesis del teorema anterior, existen constantes C y r_0, que dependen de n, ν, p y los coeficientes $a_{i,j}$, tales que, para toda bola $B(x_0, r)$, con $r < r_0 < 1$ y $\overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$, y toda $u \in h^{2,1}(\Omega)$ con $sop(u) \subset B(x_0, r)$, se tiene*

$$\left\| \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{h^1(\Omega)} \leq C \|Lu\|_{h^1(\Omega)}.$$

Ya que, como es sabido, el espacio BMO clásico es el dual del bien conocido espacio de Hardy (no-local) H^1, nuestros resultados obtenidos en el Capítulo 3 son, en cierta forma, una versión dual de estos últimos, y los espacios LMO que consideramos representan una versión β-local de los considerados por Sun y Su.

Las estimaciones interiores de BMO para derivadas de soluciones de ecuaciones elípticas lineales de segundo orden, con coeficientes en un subesacio adecuado LMO, fueron estudiados por primera vez por P. Acquistapace en [Acq92]. Después de eso, Q. Huang en [Hua96] obtuvo estimaciones interiores en BMO_ψ (donde ψ es una función continua y positiva) para las derivadas de segundo orden de las soluciones de sistemas de ecuaciones elípticas en forma de no divergencia con coeficientes en $VMO_\omega \cap L^\infty$ (donde ω es una función que se define a partir de ψ). Además, se pueden encontrar resultados similares pero para operadores diferenciales de segundo orden modelados en los campos vectoriales de Hörmander en el grupo de Carnot en [BF13] (ver también las referencias allí). Relacionado al caso con una función peso, en [HSV14] se obtuvieron estimaciones interiores en L^p, con $1 < p < \infty$, para operadores diferenciales elípticos de orden $2m$, con $m \geq 1$, para clases de Muckenhoupt A_p locales y, recientemente en [CD18], con condiciones de contorno de Dirichlet para pesos en las clases de Muckenhoupt A_p usuales. Sin embargo en [CD18] los autores demostraron que la clase A_p local es necesaria para obtener los resultados relativos al operador Δ^m. Finalmente, en [CVV18], se obtienen estimaciones interiores en L^p con pesos en clases A_p locales para el operador de Schrödinger.

Hacemos un comentario final con respecto a la notación: En muchas ocasiones, denotaremos con la misma letra C a (posiblemente) distintas constantes que aparecen en los pasos de alguna estimación. Cuando nos resulte importante indicar los parámetros sobre los cuales depende alguna de estas constantes, estos aparecerán como subíndices en dichas constantes.

Capítulo 2

Caracterización de pesos A_∞ locales y condición $\mathcal{B}_p$ local

2.1. Introducción: Pesos de Muckenhoupt locales y espacios BMO relacionados

En un espacio métrico (X,d) con PHD (ver Capítulo 1, página 5), consideramos un abierto propio $\Omega \subset X$ tal que las bolas contenidas en él son conjuntos conexos y, para cada $\beta \in (0,1)$, la familia de bolas $\mathcal{F}_\beta$ definida en el Capítulo 1. Además, el conjunto Ω estará provisto de una medida de Borel μ duplicante sobre $\mathcal{F}_\beta$. Para esta familia, definimos la clase de pesos A_p^β como sigue.

Definición 2.1.1. *Sea $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ no-negativo en casi todo punto de Ω y $1 < p < \infty$. Diremos que w es un peso en A_p^β, y se denotará $w \in A_p^\beta$, si*

$$\sup_{B \in \mathcal{F}_\beta} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B w \; d\mu \right) \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B w^{\frac{-1}{p-1}} d\mu \right)^{p-1} < \infty.$$

Para $p = 1$, diremos que w es un peso en A_1^β, y se denotará $w \in A_1^\beta$, si

$$\sup_{B \in \mathcal{F}_\beta} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B w \; d\mu \right) \left(\inf_{x \in B} w\,(x) \right)^{-1} < \infty,$$

donde el ínfimo se toma en casi todo punto de cada bola B. Para $p = \infty$, se definirá entonces

$$A_\infty^\beta = \bigcup_{1 \le q < \infty} A_q^\beta.$$

Observación 2.1.2. Como sucede con las clases usuales de pesos de Muckenhoupt, tenemos $A_p^\beta \subset A_q^\beta$, para todos $1 \le p < q \le \infty$. La demostración de este hecho es la misma que la del caso euclídeo.

Observación 2.1.3. Es importante destacar que, si $0<\alpha<\beta<1$, $A_p^\beta = A_p^\alpha$ (ver [HSV14], Teorema 3.4, página 622), para $1\leq p\leq\infty$, por lo que denotaremos

$$A_p^{loc} = \bigcup_{0<\beta<1} A_p^\beta.$$

Ahora, para cada $x\in\Omega$, denotamos $\rho(x) = d(x,\Omega^c)$. Así, en el contexto geométrico local consideraremos los conjuntos

$$\mathcal{S}_\beta(B) = \bigcup_{x\in B} B(x,\beta\rho(x))$$

y

$$\mathcal{E}_\beta(B) = \bigcap_{x\in B} B(x,\beta\rho(x)),$$

para $B\in\mathcal{F}_\beta$. Con estos nuevos conjuntos introducimos las siguientes clases de pesos.

Definición 2.1.4. *Sean $p>0$ y w un peso ($w\in L^1_{loc}(\Omega)$ y no-negativo en c. t. p. de Ω). Por un lado, denotaremos $w\in\mathcal{B}_p^\beta$ si*

$$\sup_{B=B(\xi,r)\in\mathcal{F}_\beta} \frac{\mu(B)\,r^p}{w(B)} \int_{\mathcal{S}_\beta(B)-B} \frac{w(x)d\mu(x)}{\mu(B(\xi,d(\xi,x)))\,d(\xi,x)^p} < \infty.$$

Por otro lado, simbolizaremos $w\in\widetilde{\mathcal{B}}_p^\beta$ si

$$\sup_{B=B(\xi,r)\in\mathcal{F}_{\beta/3}} \frac{\mu(B)\,r^p}{w(B)} \int_{\mathcal{E}_\beta(B)-B} \frac{w(x)d\mu(x)}{\mu(B(\xi,d(\xi,x)))\,d(\xi,x)^p} < \infty.$$

Notar que $B\subset\mathcal{E}_\beta(B)$ si $B\in\mathcal{F}_{\beta/3}$ (ver Lema 2.6.1).

Ahora, sean $\beta\in(0,1)$ y w un peso. Dada $g\in L^1_{loc}(\Omega)$, denotamos su *promedio* sobre B como $g_B = \frac{1}{\mu(B)}\int_B g\,d\mu$. Entonces tenemos la siguiente definición.

Definición 2.1.5. *Dado $N\in\mathbb{N}$ ($N\geq 2$), diremos que $f\in L^1_{loc}(\Omega)$ es una función de $BMO_w^{\beta,N}$ y denotaremos $f\in BMO_w^{\beta,N}$, si existe $C_{\beta,N}>0$ tal que*

$$\frac{1}{w(B)}\int_B |f-f_B|\,d\mu \leq C_{\beta,N}$$

para $B\in\mathcal{F}_{\frac{\beta}{N}}$, y

$$\frac{1}{w(B)}\int_B |f|\,d\mu \leq C_{\beta,N}$$

para $B\in\mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\frac{\beta}{N}}$. Más aún, para $N=1$, se denotará $f\in BMO_w^{\beta,1} = BMO_w^\beta$ si existe $C_\beta>0$ que verifica

$$\frac{1}{w(B)}\int_B |f-f_B|\,d\mu \leq C_\beta$$

cuando $B = B(x,r)$ con $x \in \Omega$ y $r < \beta\rho(x)$, y

$$\frac{1}{w(B(x,\beta\rho(x)))}\int_{B(x,\beta\rho(x))} |f|\ d\mu \leq C_\beta$$

con $x \in \Omega$.

Observar que, en cada uno de estos espacios, el ínfimo de las constantes que verifican las desigualdades indicadas es una norma en el espacio. En efecto, pues si se tiene

$$\frac{1}{w(B(x,\beta\rho(x)))}\int_{B(x,\beta\rho(x))} |f|\ d\mu = 0,$$

para cada $x \in \Omega$, dado que se puede tomar un cubrimiento numerable $\{B(x_j,\beta\rho(x_j))\}_j$ de Ω (X es separable por tener la PHD), se deduce que $f = 0$ en c. t. p. de Ω. Así, denotaremos con $\|f\|_{BMO_w^{\beta,N}}$ al ínfimo de las constantes involucradas. Veremos que, si w es un peso que duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$, los espacios $BMO_w^{\beta,N}$, con N recorriendo los números naturales, coinciden entre sí, aunque las normas varíen dependiendo de N.

Lema 2.1.6. *Si w es un peso que duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$ entonces*

$$BMO_w^{\beta,N} = BMO_w^\beta,$$

para cada $N \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $N \geq 2$ fijo. Tomamos $f \in BMO_w^{\beta,N}$. Sea $B \in \mathcal{F}_\beta$. Como $\int_B |f - f_B|\ d\mu \leq 2\int_B |f|\ d\mu$, es trivial que

$$\|f\|_{BMO_w^\beta} \leq 2\,\|f\|_{BMO_w^{\beta,N}},$$

de lo que se deduce $BMO_w^{\beta,N} \subset BMO_w^\beta$. Sean ahora $f \in BMO_w^\beta$ y $B = B(x,r) \in \mathcal{F}_\beta$. Si $r \leq \frac{\beta}{N}\rho(x)$, se tiene

$$\frac{1}{w(B)}\int_B |f - f_B|\ d\mu \leq \|f\|_{BMO_w^\beta}.$$

Por otro lado, dado que w es un peso que duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$, existe $C_{\beta,N} \geq 1$ tal que, para toda $B' \in \mathcal{F}_\beta$,

$$w(B') \leq C_{\beta,N}\, w\left(\frac{1}{N}B'\right).$$

Entonces, si $r > \frac{\beta}{N}\rho(x)$, resulta

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w(B)}\int_B |f|\ d\mu &\leq \frac{1}{w\left(B\left(x,\frac{\beta}{N}\rho(x)\right)\right)}\int_{B(x,\beta\rho(x))} |f|\ d\mu \\
&\leq \frac{C_{\beta,N}}{w(B(x,\beta\rho(x)))}\int_{B(x,\beta\rho(x))} |f|\ d\mu \\
&\leq C_{\beta,N}\,\|f\|_{BMO_w^\beta}.
\end{aligned}$$

Así obtenemos

$$\|f\|_{BMO_w^{\beta,N}} \leq C_{\beta,N}\,\|f\|_{BMO_w^\beta},$$

y luego $BMO_w^\beta \subset BMO_w^{\beta,N}$. $\square$

Ahora consideramos operadores locales de tipo integral singular definidos como en [HSV19], esto es

Definición 2.1.7. *T es un operador integral singular β-local (con $0<\beta<1$) si*

1. *T es lineal y acotado sobre $L^2(\Omega, d\mu)$.*
2. *Hay un núcleo $K:\Omega\times\Omega\to R$ tal que, para toda $f\in L_c^\infty(\Omega)$,*

$$Tf(x)=\int_\Omega K(x,y)\,f(y)\,d\mu(y),$$

para c. t. p. $x\notin sop(f)$, y $Tf(x)=0$ si $x\in\Omega$ es tal que $sop(f)\cap B(x,\beta\rho(x))=\varnothing$.

3. *Existen constantes positivas C, δ tales que, si x, $y\in\Omega$ son distintos, se tienen*

$$\text{(i)}\ \ |K(x,y)|\le C\mu(B(x,d(x,y)))^{-1}$$

y

$$\begin{aligned}\text{(ii)}\ \ &|K(x,y)-K(x',y)|+|K(y,x)-K(y,x')|\\ &\le C\mu(B(x,d(x,y)))^{-1}\left(\frac{d(x,x')}{d(x,y)}\right)^\delta,\end{aligned}$$

siempre que $d(x,y)>2d(x,x')$.

Para estos operadores tenemos el siguiente resultado de acotación.

Teorema 2.1.8. *Dados $0<\beta<1$, T operador integral singular β-local, y $w\in A_\infty^\beta\cap\mathcal{B}_\delta^\beta$, donde δ es el exponente asociado a T en 3.(ii) de la Definición 2.1.7, existe $C>0$ tal que, si f satisface $\frac{f}{w}\in L^\infty(\Omega)$, entonces*

$$\|Tf\|_{BMO_w^\beta}\le C\left\|\frac{f}{w}\right\|_\infty,$$

es decir, T es acotado de $L_w^\infty(\Omega)$ en BMO_w^β.

A su vez, cuando sean $X=\mathbb{R}^n$, d la distancia euclídea usual, y μ la medida de Lebesgue, el teorema anterior tiene un recíproco (en un cierto sentido). Para ver esto se consideran versiones locales de las muy conocidas transformadas de Riesz. Sea $\eta\in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0\le\eta\le1$, $\eta(t)=1$ si $|t|\le\frac{1}{2}$, y $\eta(t)=0$ si $|t|\ge1$. Para cada $j=1,\ldots,n$, se define una *j-ésima transformada de Riesz $\beta-$local* por

$$R_j^{\beta,\eta}f(x)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x-y|\ge\varepsilon}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right)f(y)\,dy,$$

para casi todo $x\in\Omega$ y $f\in L_c^\infty(\Omega)$. Asociado a estos operadores se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.1.9. *Dada η como antes, si existe $C > 0$ tal que, para cualquier f que satisface $\frac{f}{w} \in L^\infty(\Omega)$ y para cada $j = 1, \ldots, n$, se tiene*

$$\left\| R_j^{\beta,\eta} f \right\|_{BMO_w^\beta} \leq C \left\| \frac{f}{w} \right\|_\infty ,$$

entonces $w \in A_\infty^\beta \cap \mathcal{B}_1^\beta$.

Para las demostraciones de los teoremas anteriores, en la siguiente sección se estudiará más a fondo la clase de pesos A_∞^β.

2.2. Caracterización de pesos A_∞^{loc} en un contexto general

Considerando el contexto presentado, daremos antes algunas definiciones y notaciones que se usarán sistemáticamente en este trabajo. Como en [HSV14], dado $\beta \in (0,1)$, si $g \in L^1_{loc}(\Omega, d\mu)$, su *función maximal β-local* se define como

$$\mathcal{M}_\beta g(x) = \sup_{B \in \mathcal{F}_\beta : x \in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g| d\mu,$$

para cada $x \in \Omega$. Dada $B \in \mathcal{F}_\beta$, su *nube* es el conjunto

$$\mathcal{N}_\beta(B) = \bigcup_{V \in \mathcal{F}_\beta : V \cap B \neq \varnothing} V.$$

Además, denotaremos $\widetilde{B} = 5B$ si $5B \in \mathcal{F}_\beta$, y $\widetilde{B} = \mathcal{N}_\beta(B)$ cuando $5B \notin \mathcal{F}_\beta$. Teniendo esto en cuenta, el objetivo será probar las siguientes equivalencias.

Teorema 2.2.1. *Sea $w \in L^1_{loc}(\Omega, d\mu)$, no-negativo en c. t. p. de Ω, con μ medida duplicante sobre $\mathcal{F}_\beta$ y regular en el espacio métrico $(\Omega, d|_\Omega)$. Entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $w \in A_\infty^\beta$.

(ii) Hay una constante $C > 0$ tal que, para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$, se tiene

$$\int_{\widetilde{B}} \mathcal{M}_\beta(w\chi_B)\, d\mu \leq C \int_{\frac{1}{2}B} w\, d\mu.$$

(iii) Hay una constante $C > 0$ tal que, para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$, se tiene

$$\int_B w \log^+ \frac{w}{w_{\frac{1}{2}B}} d\mu \leq C \int_{\frac{1}{2}B} w\, d\mu.$$

(iv) El peso w duplica sobre la familia $\mathcal{F}_\beta$ y para cada $\varepsilon \in (0,1)$, existe $\alpha \in (0,1)$ tal que, para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$ y cualquier conjunto medible $E \subset B$, se tiene

$$\mu(E) \leq \alpha\mu(B) \Rightarrow \int_E w\ d\mu \leq \varepsilon \int_B w\ d\mu.$$

Para probar las equivalencias dadas, será útil obtener algunos resultados previos. En particular, nos disponemos a conseguir una desigualdad tipo *Hölder inversa local* en espacios métricos para pesos que satisfagan (iv) del Teorema 2.2.1. Con este fin, nos introducimos en el contexto dado en [MS80]. Antes damos la siguiente definición.

Definición 2.2.2. *Dado un espacio casi-métrico (X,d) con constante triangular $\kappa \geq 1$ (ver Definición 1.0.13), se dirá que tiene la propiedad $\mathcal{P}$ si existe $\sigma \in (0,1)$ tal que, para cualesquiera $x \in X$, $R > 0$, $y \in B(x,R)$, y $r \in (0, 2\kappa R]$, hay un $z \in X$ tal que*

$$B(z, \sigma r) \subset B(x,R) \cap B(y,r).$$

Ejemplo 2.2.3. Sean X un espacio vectorial, $\|\cdot\|$ una norma en X, $B(x,R)$ una bola en $(X, \|\cdot\|)$, $y \in B(x,R)$ y $0 < r \leq 2R$. Si $B(y,r) \subset B(x,R)$, la propiedad $\mathcal{P}$ se verifica con $z = y$ para cualquier $\sigma \in (0,1)$. Suponemos entonces $B(y,r) \not\subseteq B(x,R)$. Si $x = y$, en este caso deberá ser $R \leq r \leq 2R$, y luego

$$B(x, r/2) \subset B(x,R) = B(y,r) \cap B(x,R).$$

Consideramos entonces $x \neq y$. Si $\|y-x\| \geq \frac{r}{2}$, tomamos $z = y + \frac{r}{2}\frac{x-y}{\|x-y\|}$ y $z' \in B\left(z, \frac{r}{2}\right)$. Entonces,

$$\|z'-y\| \leq \|z'-z\| + \|z-y\| < r,$$

y

$$\begin{aligned}
\|z'-x\| &\leq \|z'-z\| + \|z-x\| \\
&= \|z'-z\| + \left|\|y-x\| - \frac{r}{2}\right| \\
&< \frac{r}{2} + \|y-x\| - \frac{r}{2} < R,
\end{aligned}$$

por lo que $B\left(z, \frac{r}{2}\right) \subset B(y,r)$ y $B\left(z, \frac{r}{2}\right) \subset B(x,R)$. Para $\|y-x\| < \frac{r}{2}$, sean $z = \frac{1}{2}(x+y)$ y $z' \in B\left(z, \frac{r}{4}\right)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\|z'-y\| &\leq \|z'-z\| + \|z-y\| \\
&= \|z'-z\| + \frac{1}{2}\|x-y\| \\
&< \frac{r}{4} + \frac{r}{4} < r,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\|z'-x\| &\leq \|z'-z\| + \|z-x\| \\
&= \|z'-z\| + \frac{1}{2}\|y-x\|
\end{aligned}$$

$$< \frac{r}{4} + \frac{r}{4} \leq R,$$

por lo que $B\left(z, \frac{r}{4}\right) \subset B(y, r)$ y $B\left(z, \frac{r}{4}\right) \subset B(x, R)$. Así, tomando $\sigma = \frac{1}{4}$ se verifica la propiedad $\mathcal{P}$ en $(X, \|\cdot\|)$.

Dado un espacio casi-métrico (X, d), en [MS80] se prueba que siempre se puede construir una casi-métrica δ con las siguientes propiedades:

$$\text{Para cada } x, y \in X,\ \delta(x, y) \leq d(x, y) \leq 3\kappa^2 \delta(x, y); \tag{2.2.4}$$

$$(X, \delta) \text{ tiene la propiedad } \mathcal{P}. \tag{2.2.5}$$

En nuestro contexto será $\kappa = 1$ y los resultados se probarán para el espacio casi-métrico (X, δ). Con el fin de trabajar con la geometría local en este espacio y luego trasladar lo probado al espacio con la métrica inicial d, haremos algunas observaciones básicas sobre la relación entre la teoría pesada local en el espacio métrico (X, d) y la correspondiente al espacio casi-métrico (X, δ). Antes, será conveniente dar el siguiente lema.

Lema 2.2.6. *Sean $0 < \gamma \leq \frac{\beta}{1+\beta}$ y, en el espacio métrico (X, d), $B(y, r) \in \mathcal{F}_\gamma$, y $z \in B(y, r)$. Entonces, $B(z, r) \in \mathcal{F}_\beta$.*

Demostración. Si $z' \notin \Omega$, se tiene

$$\rho(y) \leq d(y, z) + d(z, z') < \gamma\rho(y) + d(z, z'),$$

por lo que tomando ínfimo sobre $z' \notin \Omega$, obtenemos

$$(1 - \gamma)\rho(y) \leq \rho(z).$$

Con este hecho se sigue que

$$r \leq \gamma\rho(y) \leq \frac{\gamma}{1 - \gamma}\rho(z) \leq \beta\rho(z),$$

por la elección de γ. □

En la demostración del lema anterior probamos un lado de una desigualdad que será frecuentemente aplicada en este trabajo, por lo cual la enunciamos a continuación.

Lema 2.2.7. *Sean (X, d) espacio métrico, $0 < \beta < 1$ y Ω abierto propio no vacío del mismo. Entonces, para todos $\xi \in \Omega$ y $x \in B(\xi, \beta\rho(\xi))$, se tiene*

$$(1 - \beta)\rho(\xi) \leq \rho(x) \leq (1 + \beta)\rho(\xi).$$

Demostración. Sean $\xi \in \Omega$ y $x \in B_\beta(\xi)$. Si $z \in \Omega^c$, tenemos

$$\rho(x) \leq d(x,\xi) + d(\xi,z) < \beta\rho(\xi) + d(\xi,z)$$

y

$$\rho(\xi) \leq d(\xi,x) + d(x,z) < \beta\rho(\xi) + d(x,z),$$

por lo cual la conclusión de la demostración es clara. □

Observación 2.2.8. Sean $\mathcal{F}^d_\beta = \{B_d(x,r) : x \in \Omega,\ 0 < r \leq \beta d(x,\Omega^c)\}$ y $\mathcal{F}^\delta_\beta = \{B_\delta(x,r) : x \in \Omega,\ 0 < r \leq \beta\delta(x,\Omega^c)\}$. Si $B_\delta(y,r) \in \mathcal{F}^\delta_\beta$ entonces, por (2.2.4) tenemos

$$\delta(y,\Omega^c) \leq d(y,\Omega^c) \leq 3\delta(y,\Omega^c)$$

y luego $r \leq \beta\delta(y,\Omega^c) \leq \beta d(y,\Omega^c)$, o sea, $B_d(y,r) \in \mathcal{F}^d_\beta$. Inversamente, si $B_d(y,r) \in \mathcal{F}^d_\beta$, se tiene $r \leq \beta d(y,\Omega^c) \leq 3\beta\delta\,(y,\Omega^c)$, y luego, $B_\delta(y,\frac{1}{3}r) \in \mathcal{F}^\delta_\beta$. Más aún, si $B_\delta(y,r) \in \mathcal{F}^\delta_{\beta/3}$, resulta

$$B_\delta(y,r) \subset B_d(y,3r) \in \mathcal{F}^d_\beta.$$

Así aseguramos que, para cualquier $B \in \mathcal{F}^\delta_{\beta/3}$, $\overline{B} \subset \Omega$.

Observación 2.2.9. Sean ν, medida de Borel que duplica sobre la familia $\mathcal{F}^d_\beta$, y $\gamma \leq \frac{\beta}{3}$. Por (2.2.4) se tiene,

$$B_d(y,r) \subset B_\delta(y,r) \subset B_d(y,3r),$$

para todos $y \in \Omega$ y $r > 0$. Si $B_\delta(y,r) \in \mathcal{F}^\delta_{\gamma/2}$ entonces $B_d(y,6r) \in \mathcal{F}^d_\beta$, y luego

$$\begin{aligned}\nu\left(B_\delta(y,2r)\right) &\leq \nu\left(B_d(y,6r)\right) \leq C\nu\left(B_d(y,r)\right)\\ &\leq C\nu\left(B_\delta(y,r)\right).\end{aligned}$$

De este modo, se deduce que ν duplica sobre la familia $\mathcal{F}^\delta_\gamma$.

Observación 2.2.10. Sean ν, medida de Borel que duplica sobre la familia $\mathcal{F}^d_\beta$, $\gamma \leq \frac{\beta}{111}$, y $\sigma \in (0,1)$ dado por (2.2.5) y la Definición 2.2.2 para (X,δ,ν). Veamos que si $B_\delta(y,r) \in \mathcal{F}^\delta_\gamma$, ésta es un espacio de tipo homogéneo con la casi-métrica δ y la medida ν (restringidas a la bola). Si $x,\ z \in B_\delta\,(y,r)$ y $t \geq 6r$, se tiene por (2.2.4)

$$\begin{aligned}\delta\,(z,x) &\leq d\,(z,y) + d\,(y,x)\\ &\leq 3\,(\delta\,(z,y) + \delta\,(y,x)) < 6r \leq t,\end{aligned}$$

así, $B_\delta\,(y,r) \subset B_\delta\,(x,t)$. Luego

$$\nu\left(B_\delta\,(x,2t) \cap B_\delta\,(y,r)\right) = \nu\left(B_\delta\,(y,r)\right) = \nu\left(B_\delta\,(x,t) \cap B_\delta\,(y,r)\right).$$

Ahora sea $t < 6r$. Por la Observación 2.2.8 se tiene $B_d(y,r) \in \mathcal{F}^d_\gamma$ y esto, junto con el Lema 2.2.7, nos da

$$t < 6\gamma d\,(y,\Omega^c) \leq \frac{6\gamma}{1-3\gamma} d\,(x,\Omega^c) < \frac{\beta}{18} d\,(x,\Omega^c)\,,$$

ya que $x \in B_\delta(y,r) \subset B_d(y,3r)$ y además $\frac{6\gamma}{1-3\gamma} < \frac{6\beta/111}{1-3/111} = \frac{\beta}{18}$. Entonces, $B_d(x,6t) \in \mathcal{F}_{\beta/3}$. Luego, por la propiedad $\mathcal{P}$, existe un $z \in B_\delta(x,t)$ tal que

$$\begin{aligned}\nu(B_\delta(x,2t)\cap B_\delta(y,r)) &\leq \nu(B_d(x,6t)) \leq C\nu\left(B_d(x,3t)\right)\\ &\leq C\nu(B_d(z,6t)) \leq C'\nu(B_\delta(z,\sigma t))\\ &\leq C'\nu(B_\delta(x,t)\cap B_\delta(y,r))\end{aligned}$$

(donde C' depende también de σ), ya que $B_d(z,6t) \in \mathcal{F}_\beta^d$, por el Lema 2.2.6. Así, $\left(B_\delta(y,r), \delta|_{B_\delta(y,r)}, \nu|_{B_\delta(y,r)}\right)$ es un espacio de tipo homogéneo con constante triangular 3 y donde la constante de duplicación de $\nu|_{B_\delta(y,r)}$ depende de σ y β, pero es independiente de $B_\delta(y,r)$.

Observación 2.2.11. Sean μ y ν medidas de Borel sobre Ω. Se dirá que ν es *comparable* a μ sobre la familia $\mathcal{F}_\beta$ si para cada $\varepsilon \in (0,1)$, existe $\alpha \in (0,1)$ tal que, para cualesquiera $B \in \mathcal{F}_\beta$ y $E \subset B$ (medible), se tiene

$$\mu(E) \leq \alpha\ \mu(B) \Rightarrow \nu(E) \leq \varepsilon\ \nu(B)$$

(así, (iv) del Teorema 2.2.1 dice que la medida generada por w es comparable a μ). Veamos que ν es comparable a μ sobre $\mathcal{F}_\gamma^\delta$, con $\gamma \leq \frac{\beta}{3}$, si ν es duplicante y comparable a μ sobre $\mathcal{F}_\beta^d$. Sean $C \geq 1$, una constante de duplicación de ν sobre $\mathcal{F}_\beta^d$, y $\varepsilon \in (0,1)$. Tomamos $\alpha \in (0,1)$ correspondiente a $\frac{\varepsilon}{C}$ para la comparabilidad sobre $\mathcal{F}_\beta^d$. Si $B_\delta \in \mathcal{F}_\gamma^\delta$ y B_d es la bola con mismo centro y radio, pero respecto a la métrica d, $3B_d \in \mathcal{F}_\beta^d$, por la Observación 2.2.8. Entonces, si $E \subset B_\delta$ es medible y tal que $\mu(E) \leq \alpha\ \mu(B_\delta)$, se tiene $\mu(E) \leq \alpha\ \mu(3B_d)$, y luego

$$\nu(E) \leq \frac{\varepsilon}{C}\nu(3B_d) \leq \varepsilon\nu(B_d) \leq \varepsilon\nu(B_\delta).$$

Observación 2.2.12. Sean μ, medida de Borel sobre Ω que duplica sobre $\mathcal{F}_\beta^d$, y $w \in A_p^\beta(\Omega,d,\mu)$, con $1 < p < \infty$. Veamos que $w \in A_p^\gamma(\Omega,\delta,\mu)$, o sea, w verifica la condición A_p sobre bolas de $\mathcal{F}_\gamma^\delta$, con $\gamma \leq \frac{\beta}{3}$. Si $B_\delta \in \mathcal{F}_\gamma^\delta$ y B_d es la bola con el mismo centro y radio que B_δ, pero respecto a la métrica d, se tiene $3B_d \in \mathcal{F}_\beta^d$, por Observación 2.2.8. Entonces, por duplicación de μ sobre $\mathcal{F}_\beta^d$, existe $C \geq 1$ (independiente de B_d) tal que

$$\begin{aligned}\int_{B_\delta} w\ d\mu\left(\int_{B_\delta} w^{\frac{-1}{p-1}}d\mu\right)^{p-1} &\leq \int_{3B_d} w\ d\mu\left(\int_{3B_d} w^{\frac{-1}{p-1}}d\mu\right)^{p-1}\\ &\leq [w]_{A_p^\beta}\,\mu(3B_d)^p\\ &\leq C^p[w]_{A_p^\beta}\,\mu(B_d)^p\\ &\leq C^p[w]_{A_p^\beta}\,\mu(B_\delta)^p.\end{aligned}$$

Observación 2.2.13. Sean μ, medida de Borel sobre Ω que duplica sobre una familia $\mathcal{F}_\beta^d$, y w un peso que también duplica sobre $\mathcal{F}_\beta^d$. Veamos que si $\gamma \leq \frac{\beta}{9}$ y w verifica una desigualdad tipo Hölder inversa con respecto a μ sobre las bolas de $\mathcal{F}_{3\gamma}^\delta$, entonces verifica este tipo de desigualdad sobre $\mathcal{F}_\gamma^d$. Sean $s > 1$ el exponente de la correspondiente desigualdad tipo Hölder inversa para w, $B_d \in \mathcal{F}_\gamma^d$, y B_δ la bola con mismo centro y radio, pero respecto a la casi-métrica δ. Por Observación 2.2.8, $B_\delta \in \mathcal{F}^\delta_{3\gamma}$, y luego, ya que μ duplica sobre $\mathcal{F}^d_{3\gamma}$ y, por la Observación 2.2.9, w duplica sobre $\mathcal{F}^\delta_{3\gamma}$, se obtiene

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\mu(B_d)}\int_{B_d} w^s d\mu\right)^{\frac{1}{s}} &\leq \left(\frac{C}{\mu(3B_d)}\int_{B_\delta} w^s d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq \left(\frac{C}{\mu(B_\delta)}\int_{B_\delta} w^s d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq \frac{C'}{\mu(B_\delta)}\int_{B_\delta} w\ d\mu \\ &\leq \frac{C'}{\mu(B_d)}\int_{3B_d} w\ d\mu \\ &\leq \frac{C''}{\mu(B_d)}\int_{B_d} w\ d\mu.\end{aligned}$$

Ahora, para obtener una desigualdad tipo Hölder inversa local, recurriremos al Lema 5.2 en [ABI05]. Allí, dado un espacio de tipo homogéneo (X, d, μ), siempre se puede construir una familia $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X llamados *conjuntos diádicos*, los cuales juegan el rol de los cubos diádicos en los espacios euclídeos (ver Observación 1.0.20). Diremos entonces que un peso w está en $A_p^{\mathcal{D}}$ (lo que denotaremos como $w \in A_p^{\mathcal{D}}$), para $1 \leq p \leq \infty$, si verifica la condición A_p usual sobre los elementos de $\mathcal{D}$. Es fácil probar que un peso que verifica una condición A_p usual está en $A_p^{\mathcal{D}}$. Dicho esto, presentamos el lema en cuestión.

Lema 2.2.14. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo donde las funciones continuas son densas en $L^1(X)$ y tal que sus bolas son conjuntos abiertos. Si $w \in A_p^{\mathcal{D}}$ para alguna familia diádica $\mathcal{D}$, con $1 \leq p \leq \infty$, existen constantes positivas C y σ, que dependen solo de p, la constante de la condición $A_p^{\mathcal{D}}$ de w y las constantes geométricas del espacio, tales que*

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w^{1+\sigma}\ d\mu\right)^{\frac{1}{1+\sigma}} \leq \frac{C}{\mu(Q)}\int_Q w\ d\mu,$$

para todo $Q \in \mathcal{D}$.

Observación 2.2.15. En realidad, para demostrar el lema anterior se usa una condición más debil que la condición $A_p^{\mathcal{D}}$. A saber, examinando la demostración del Lema 5.2 en [ABI05], se ve que basta pedir que existan constantes α y β en $(0, 1)$ verificando que, para cada $Q \in \mathcal{D}$ y $E \subset Q$ (medible) tal que $\mu(E) \leq \alpha\mu(Q)$, se tiene $w(E) \leq \beta w(Q)$. Es fácil probar que si $w \in A_p^{\mathcal{D}}$ entonces w verifica esta condición.

Para probar el siguiente resultado, usaremos la siguiente propiedad de los elementos de $\mathcal{D}$: Existen constantes positivas a y A tales que $a < 1 \leq A$ y para cada $Q \in \mathcal{D}$ hay una bola B_Q, con centro en Q, verificando

$$aB_Q \subset Q \subset AB_Q. \qquad (2.2.16)$$

También, en lo que sigue, diremos que un peso w es comparable a la medida μ sobre una familia $\mathcal{F}_\beta$ si la medida inducida por w es comparable a μ sobre $\mathcal{F}_\beta$.

Teorema 2.2.17. *Supongamos que la medida μ es regular sobre el espacio métrico $(\Omega, d|_\Omega)$, y sean $\beta \in (0,1)$ y $0 < \gamma \leq \frac{\beta}{333}$. Si $w \in L^1_{loc}(\Omega, d\mu)$ es no-negativo en c. t. p. de Ω, duplica y es comparable a μ sobre la familia $\mathcal{F}_\beta$, existen $C \geq 1$ y $s > 1$ tales que, para toda $B \in \mathcal{F}_\gamma$, se tiene*

$$\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B w^s\ d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \leq \frac{C}{\mu(B)}\int_B w\ d\mu.$$

Demostración. Veamos que w verifica la desigualdad buscada sobre las bolas de $\mathcal{F}^\delta_{3\gamma}$, donde δ es la casi-métrica equivalente a d dada por [MS80]. Sea $B = B_\delta(\xi, r) \in \mathcal{F}^\delta_{3\gamma}$. Por la Observación 2.2.10, $(B, \delta|_B, \mu|_B)$ es un espacio de tipo homogéneo con constante triangular 3 y donde la constante de duplicación de $\mu|_B$ es independiente de B. Sea $\mathcal{D}$ una familia de conjuntos diádicos de $(B, \delta|_B, \mu|_B)$ como la de la Observación 1.0.20. Por la Observación 2.2.11 sabemos que w es comparable a μ sobre $\mathcal{F}^\delta_\kappa$, para cualquier $\kappa \leq \beta/3$. Veamos que w verifica la propiedad dada en la Observación 2.2.15. Por la propiedad $\mathcal{P}$ (Definición 2.2.2) y la Observación 2.2.9, hay una constante $C_0 \geq 1$ (independiente de B) tal que, para cada bola B_δ con centro en B y radio no mayor a $6r$, se tiene

$$w(B_\delta) \leq C_0 w(B_\delta \cap B). \tag{2.2.18}$$

Además, por la Observación 2.2.10, $(B, \delta|_B, w|_B)$ es también un espacio de tipo homogéneo donde la constante de duplicación de $w|_B$ no depende de B. De este modo, existe $C_1 \geq 1$ tal que

$$w\left(AB_\delta \cap B\right) \leq C_1 w\left(aB_\delta \cap B\right), \tag{2.2.19}$$

para todo bola B_δ con centro en B, donde a y A son las constantes dadas en (2.2.16). Ahora, supongamos que fijamos un número $\kappa \geq 3\gamma$ y, para $\varepsilon = (2C_0C_1)^{-1}$, consideramos un correspondiente $\alpha \in (0,1)$ dado por la comparabilidad de w con μ sobre $\mathcal{F}^\delta_\kappa$. Sea $Q \in \mathcal{D}$ y $B_Q = B(x_Q, r_Q) \cap B$. Por (2.2.16) sabemos que

$$B\left(x_Q, ar_Q\right) \cap B \subset Q \subset B\left(x_Q, Ar_Q\right) \cap B.$$

Entonces, por un lado, si suponemos $Ar_Q \geq 6r$, tenemos $B \subset B\left(x_Q, Ar_Q\right)$, y luego, si $E \subset Q$ es medible y $\mu(E) \leq \alpha\mu(Q)$, resulta $E \subset B$ y $\mu(E) \leq \alpha\mu(B)$, por lo que

$$\begin{aligned} w(E) &\leq \varepsilon w(B) = \varepsilon w\left(B\left(x_Q, Ar_Q\right) \cap B\right) \\ &\leq \varepsilon C_1 w\left(B\left(x_Q, ar_Q\right) \cap B\right) \leq \frac{1}{2} w(Q). \end{aligned}$$

Ahora, supongamos $Ar_Q < 6r$. Si tomamos $z \notin \Omega$, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\delta(\xi, \Omega^c) &\leq \delta(\xi, x_Q) + \delta(x_Q, z) \\ &< 3\gamma\delta(\xi, \Omega^c) + \delta(x_Q, z), \end{aligned}$$

por lo cual

$$\left(\frac{1}{3} - 3\gamma\right)\delta(\xi, \Omega^c) \leq \delta(x_Q, \Omega^c),$$

y luego

$$Ar_Q < 18\gamma\delta(\xi,\Omega^c) \leq \frac{18\gamma}{\frac{1}{3}-3\gamma}\delta(x_Q,\Omega^c),$$

donde

$$\frac{18\gamma}{\frac{1}{3}-3\gamma} \leq 6\frac{\frac{\beta}{111}}{\frac{1}{3}-\frac{\beta}{111}} = 6\frac{\beta}{37-\beta} < \frac{\beta}{6}$$

y

$$\frac{18\gamma}{\frac{1}{3}-3\gamma} > \frac{18\gamma}{1/3} > 3\gamma.$$

Así, si tomamos $\kappa = \frac{18\gamma}{\frac{1}{3}-3\gamma}$, tenemos $3\gamma \leq \kappa < \beta/3$ y $B(x_Q, Ar_Q) \in \mathcal{F}^\delta_\kappa$. Luego, si $E \subset Q$ es medible y $\mu(E) \leq \alpha\mu(Q)$, entonces $E \subset B(x_Q, Ar_Q)$ y $\mu(E) \leq \alpha\mu(B(x_Q, Ar_Q))$, por lo que

$$\begin{aligned} w(E) &\leq \varepsilon w(B(x_Q, Ar_Q)) \leq \varepsilon C_0 w\left(B\left(x_Q, Ar_Q\right) \cap B\right) \\ &\leq \varepsilon C_0 C_1 w\left(B\left(x_Q, ar_Q\right) \cap B\right) \leq \frac{1}{2} w(Q), \end{aligned}$$

debido a (2.2.19) y (2.2.18). De este modo conseguimos ver que w verifica la propiedad buscada. Luego, debido a la Observación 2.2.15, es posible aplicar el Lema 2.2.14 para el espacio de tipo homogéneo $(B, \delta|_B, \mu|_B)$, por lo que existen constantes positivas C y σ, independientes de B, tales que, para cualquier $Q \in \mathcal{D}$, se tiene

$$\left(\mu(Q)^{-1}\int_Q w^{1+\sigma}d\mu\right)^{1+\sigma} \leq Cw_Q.$$

Como $(B, \delta|_B, \mu|_B)$ es acotado, debido a la Observación 1.0.20, existe $Q_0 \in \mathcal{D}$ tal que $B = Q_0$. Así, la desigualdad de arriba se obtiene con B en lugar de Q tomando $Q = Q_0$. Finalmente, se consigue probar el resultado debido a la Observación 2.2.13.

$\square$

El siguiente lema será útil para extender la desigualdad obtenida arriba sobre cualquier familia $\mathcal{F}_\beta$.

Lema 2.2.20. *Sean $0 < \gamma < \beta < 1$ y w un peso que duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$ y que verifica una desigualdad tipo Hölder inversa sobre $\mathcal{F}_\gamma$. Entonces, w verifica la misma desigualdad sobre $\mathcal{F}_\beta$.*

Demostración. Sea $s > 1$ el exponente para el cual w verifica una desigualdad tipo Hölder inversa sobre $\mathcal{F}_\gamma$. Sea $B = B(x,r) \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_\gamma$. Consideramos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\beta}{1-\beta} \leq 2^n\gamma$. Como consecuencia de la PHD (ver Observación 1.0.11), existen $M \in \mathbb{N}$ (que depende de n, pero es independiente de B) y $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset B$ tales que

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{m} B\left(x_j, \frac{r}{2^n}\right), \tag{2.2.21}$$

con $m \leq M$. Además, para cada j se tiene

$$\frac{r}{2^n} \leq \frac{\beta}{2^n}\rho(x) \leq \frac{\beta}{2^n(1-\beta)}\rho(x_j) \leq \gamma\rho(x_j),$$

o sea, $\{B(x_j, r/2^n)\}_{j=1,\ldots,m} \subset \mathcal{F}_\gamma$. Supongamos que $B(x_j, 2r) \in \mathcal{F}_\beta$. En ese caso se tiene

$$\mu(B) \leq C\mu\left(B\left(x_j, \frac{r}{2^n}\right)\right),$$

por duplicación de μ. En caso contrario ($2r > \beta\rho(x_j)$), por el Lema 3.1 en [HSV14] (ver Lema 1.0.8 en el Capítulo 1), si ν es una medida que duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$, hay una constante $C_{\nu,\beta}$ tal que, si $V \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\beta/5}$, $\nu(\mathcal{N}_\beta(V)) \leq C_{\nu,\beta}\nu(V)$. Entonces, para cada j,

$$\begin{aligned}\mu(B) &\leq \mu(\mathcal{N}_\beta(B(x_j, \beta\rho(x_j)))) \leq C_{\mu,\beta}\mu(B(x_j, \beta\rho(x_j)))\\ &\leq C'_{\mu,\beta}\mu\left(B\left(x_j, \frac{\beta}{2^{n+1}}\rho(x_j)\right)\right) \leq C'_{\mu,\beta}\mu\left(B\left(x_j, \frac{r}{2^n}\right)\right),\end{aligned}$$

o sea,

$$\mu(B) \leq C'_{\mu,\beta}\mu\left(B\left(x_j, \frac{r}{2^n}\right)\right), \tag{2.2.22}$$

y, como w duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$, tenemos

$$\begin{aligned}w\left(B\left(x_j, \frac{r}{2^n}\right)\right) &\leq w(\mathcal{N}_\beta(B(x, \beta\rho(x)))) \leq C_{w,\beta}w(B(x, \beta\rho(x)))\\ &\leq C'_{w,\beta}w\left(B\left(x, \frac{\beta}{2^n}\rho(x)\right)\right) \leq C'_{w,\beta}w(B(x, \gamma\rho(x)))\\ &\leq C'_{w,\beta}w(B).\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

Luego, llamando C' a la más grande de las constantes en (2.2.22) y (2.2.23), por (2.2.21) y la hipótesis dada, resulta

$$\begin{aligned}\int_B w^s d\mu &\leq \sum_{j=1}^m \int_{B(x_j, r/2^n)} w^s d\mu\\ &\leq C_{w,s,\gamma}\sum_{j=1}^m \mu\left(B\left(x_j, \frac{r}{2^n}\right)\right)^{1-s}\left(\int_{B(x_j, r/2^n)} w\, d\mu\right)^s\\ &\leq C_{w,s,\gamma}(C')^{2s-1}M\mu(B)^{1-s}w(B)^s.\end{aligned}$$

□

Claramente, el Teorema 2.2.17 y el Lema 2.2.20 nos proporcionan el siguiente corolario.

Corolario 2.2.24. *Supongamos que la medida μ es regular sobre el espacio métrico $(\Omega, d|_\Omega)$. Si $w \in L^1_{loc}(\Omega, d\mu)$, es no-negativo c. t. p. de Ω, duplica y es comparable a μ sobre la familia $\mathcal{F}_\beta$, existen $C \geq 1$ y $s > 1$ tales que, para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$, se tiene*

$$\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B w^s\, d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \leq \frac{C}{\mu(B)}\int_B w\, d\mu.$$

Como sucede en el caso no-local, la condición A_p^{loc} también proporciona una desigualdad tipo Hölder inversa.

Teorema 2.2.25. *Supongamos que la medida μ es regular sobre el espacio métrico $(\Omega, d|_\Omega)$, y sean $\beta \in (0,1)$ y $0 < \gamma \leq \frac{\beta}{333}$. Si $w \in A_p^{loc}$, con $1 < p < \infty$, existen $C \geq 1$ y $s > 1$ tales que, para toda $B \in \mathcal{F}_\gamma$, se tiene*

$$\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B w^s\, d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \leq \frac{C}{\mu(B)}\int_B w\, d\mu.$$

Demostración. La demostración es similar a la del Teorema 2.2.17. Sea $B = B_\delta(\xi, r) \in \mathcal{F}^\delta_{3\gamma}$, donde δ es la casi-métrica equivalente a d dada por [MS80]. Por la Observación 2.2.10, $(B, \delta|_B, \mu|_B)$ es un espacio de tipo homogéneo con constante triangular 3 y donde la constante de duplicación de $\mu|_B$ es independiente de B. Veremos que $w \in A_p(B, \delta|_B, \mu|_B)$ y, posteriormente, $w \in A_p^{\mathcal{D}}$, donde $\mathcal{D}$ es una familia de conjuntos diádicos de $(B, \delta|_B, \mu|_B)$. Luego, podremos aplicar el Lema 2.2.14 y el resto de la demostración seguirá como la del Teorema 2.2.17. Ahora, como $w \in A_p^\beta(\Omega, d, \mu)$, tenemos $w \in A_p^\kappa(\Omega, \delta, \mu)$, para cualquier $\kappa \leq \beta/3$, por la Observación 2.2.12. Sean $x \in B$ y $t > 0$. Si $t \geq 2r$, resulta $B = B \cap B_\delta(x,t)$ y vale trivialmente que

$$\int_{B\cap B_\delta(x,t)} w\, d\mu \left(\int_{B\cap B_\delta(x,t)} w^{\frac{-1}{p-1}} d\mu\right)^{p-1} \leq [w]_{A_p^\gamma}\, \mu\left(B \cap B_\delta(x,t)\right)^p.$$

Cuando $t < 2r$, podemos considerar la constante C_0 de (2.2.18) con χ_Ω en lugar de w. De este modo, si tomamos $\kappa = \max\left\{3\gamma, \frac{6\gamma}{\frac{1}{3}-3\gamma}\right\}$, como en la demostración del Teorema 2.2.17, tenemos $3\gamma \leq \kappa < \beta/3$ y $B_\delta(x,t) \in \mathcal{F}^\delta_\kappa$. Luego, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{B\cap B_\delta(x,t)} w\, d\mu \left(\int_{B\cap B_\delta(x,t)} w^{\frac{-1}{p-1}} d\mu\right)^{p-1} &\leq \int_{B_\delta(x,t)} w\, d\mu \left(\int_{B_\delta(x,t)} w^{\frac{-1}{p-1}} d\mu\right)^{p-1}\\
&\leq [w]_{A_p^\kappa}\, \mu\left(B_\delta(x,t)\right)^p\\
&\leq C_0^p\, [w]_{A_p^\kappa}\, \mu\left(B \cap B_\delta(x,t)\right)^p.
\end{aligned}$$

□

El Lema 2.2.20, junto con este último teorema, nos proporciona el siguiente corolario.

Corolario 2.2.26. *Supongamos que la medida μ es regular sobre el espacio métrico $(\Omega, d|_\Omega)$. Si $w \in A_p^{loc}$, con $1 < p < \infty$, existen $C \geq 1$ y $s > 1$ tales que, para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$, se tiene*

$$\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B w^s\, d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \leq \frac{C}{\mu(B)}\int_B w\, d\mu.$$

Para la demostración del Teorema 2.2.1 necesitaremos también el siguiente resultado, el cual es una versión sobre bolas de una familia local de la muy conocida *descomposición* *tipo Calderón-Zygmund* de un espacio tipo homogéneo acotado, como la dada (por ejemplo) en el Lema 3.1 de [MS80], página 13. Nuestra prueba del mismo se basa en técnicas desarrolladas por H. Aimar y R. Macías en [AM84] (ver también [Aim85]).

Lema 2.2.27. *Dados $B \in \mathcal{F}_\beta$, $f \in L^1(\Omega, d\mu)$, no-negativa en c. t. p. con soporte contenido en B, y $\lambda \geq f_B$ para el cual $\{y \in \Omega : \mathcal{M}_\beta f(y) > \lambda\} \neq \varnothing$, existe $\{B_j\} \subset \mathcal{F}_\beta$, familia disjunta numerable, tal que*

$$f_{\widetilde{B_j}} \leq \lambda < f_{B_j}, \text{ para cada } j, \tag{2.2.28}$$

y

$$f_V \leq \lambda, \text{ para toda } V \in \mathcal{F}_\beta \text{ con centro en un punto fuera de } \cup \widetilde{B_j}, \tag{2.2.29}$$

donde $\widetilde{B_j} = 5B_j$, si $5B_j \in \mathcal{F}_\beta$, y $\widetilde{B_j} = \mathcal{N}_\beta(B_j)$ cuando $5B_j \notin \mathcal{F}_\beta$.

Demostración. Sea $E = \{y \in \Omega : \mathcal{M}_\beta f(y) > \lambda\}$. Entonces, si $y \in E$, hay una $B_y \in \mathcal{F}_\beta$ tal que $y \in B_y$ y $f_{B_y} > \lambda$. Consideramos

$$\Gamma = \{x \in \Omega : \exists\ r_x \in (0, \beta\rho(x)] \ /\ f_{B(x,r_x)} > \lambda\}.$$

En particular, si $x \in \Gamma$ y $z \in B(x, r_x)$, tenemos

$$\lambda < f_{B(x,r_x)} \leq \mathcal{M}_\beta f(z),$$

por lo que $B(x, r_x) \subset E$. Así deducimos

$$E = \bigcup_{x \in \Gamma} B(x, r_x).$$

Cabe destacar que la descomposición de E anterior es válida sobre cualquier familia de bolas $\{B(x, t_x)\}_{x\in\Gamma}$ verificando $B(x, t_x) \in \mathcal{F}_\beta$ y $f_{B(x,t_x)} > \lambda$. Sea $V = B(x, r_x)$, con $x \in \Gamma$. Como $0 < \lambda < \frac{1}{\mu(V)} \int_{V\cap B} f\ d\mu$, debe ser $V \cap B \neq \varnothing$, o sea, $B \subset \mathcal{N}_\beta(V)$ (y también $V \subset \mathcal{N}_\beta(B)$). Entonces

$$\frac{1}{\mu(\mathcal{N}_\beta(V))} \int_{\mathcal{N}_\beta(V)\cap B} f\ d\mu \leq f_B \leq \lambda, \tag{2.2.30}$$

para todo $x \in \Gamma$. Ahora, sea $\gamma_x = \sup\{t \in (0, \beta\rho(x)] : f_{B(x,t)} > \lambda\}$. Es claro que, para todo $x \in \Gamma$, $r_x \leq \gamma_x \leq \beta\rho(x)$. Si $r_x < \gamma_x$, tomamos $0 < \delta < \frac{4}{5}\gamma_x$ y t_x tal que

$$\text{máx}(r_x, \gamma_x - \delta) < t_x \leq \gamma_x,$$

y

$$f_{B(x,t_x)} > \lambda.$$

Como resulta

$$5t_x > 5(\gamma_x - \delta) > \gamma_x,$$

tenemos $f_{B(x,5t_x)} \leq \lambda$ cuando $5t_x \leq \beta\rho(x)$. Si $r_x = \gamma_x$ escogemos $t_x = \gamma_x$ y se sigue verificando lo anterior. Denotando $B_x = B(x, t_x)$ y teniendo en cuenta que $\widetilde{B_x} = 5B_x$, si $5B_x \in \mathcal{F}_\beta$, y $\widetilde{B_x} = \mathcal{N}_\beta(B_x)$ en caso contrario, por (2.2.30) se obtiene

$$f_{\widetilde{B_x}} \leq \lambda < f_{B_x}, \tag{2.2.31}$$

para cada $x \in \Gamma$, y además

$$E = \bigcup_{x\in\Gamma} B_x. \tag{2.2.32}$$

Buscamos ahora una subfamilia numerable de $\{B_x\}_{x\in\Gamma}$. Sea, para cada $j \in \mathbb{Z}$, $\Omega_j = \{x \in \Omega : 2^{j-1} \leq \rho(x) < 2^j\}$. Si $B = B(\xi, r)$, sea k_ξ el entero tal que $\xi \in \Omega_{k_\xi}$. Por resultados en [HSV14] páginas 615 y 616 (ver Observación 1.0.7), se sabe que existen enteros m y n, dependientes solo de β, tales que

$$\mathcal{N}_\beta(B) \subset \bigcup_{j=k_\xi-m-n}^{k_\xi+m+1} \Omega_j,$$

por lo cual, si $B(x,t) \in \mathcal{F}_\beta$ es tal que $B(x,t) \cap B \neq \varnothing$, se tiene $t \leq \beta\rho(x) < \beta 2^{k_\xi+m+1}$. Así, dado que cada B_x, con $x \in \Gamma$, es una bola de $\mathcal{N}_\beta(B)$, se deduce

$$\sup\{t_x : x \in \Gamma\} \leq 2^{k_\xi+m+1}.$$

Luego, aplicando el Lema 2.2 de [HSV14] (ver Lema 1.0.10 en el Capítulo 1), tenemos que existe $\{B_j\} \subset \{B_x\}_{x\in\Gamma}$, subfamilia disjunta a lo sumo numerable, tal que

$$\bigcup_j B_j \subset E \subset \bigcup_j \widetilde{B_j},$$

por (2.2.32), y

$$f_{\widetilde{B_j}} \leq \lambda < f_{B_j},$$

para cada j, por (2.2.31). De este modo hemos probado (2.2.28). Por último, si $B(x,t) \in \mathcal{F}_\beta$ no está contenida en $\cup\widetilde{B_j}$, es claro que $x \notin \Gamma$, por lo cual $f_{B(x,t)} \leq \lambda$, probando así (2.2.29). $\square$

Ahora estamos en condiciones de proceder con la demostración de nuestro teorema de caracterización de pesos en A_∞^{loc}.

Demostración del Teorema 2.2.1. **(i)⇒(ii)**. Sea $1 < p < \infty$ para el cual $w \in A_p^\beta$. Entonces, por Corolario 2.2.26, w satisface una desigualdad tipo Hölder inversa, sobre $\mathcal{F}_\beta$, para algún $s > 1$. También, se sabe de [HSV14] que la función máximal local es de tipo fuerte (s,s) con respecto a μ (ver Teorema 1.0.4). Luego, si $C \geq 1$ es tal que, para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$, $\mu\left(\widetilde{B}\right) \leq C\mu(B)$, se obtiene

$$\int_{\widetilde{B}} \mathcal{M}_\beta(w\chi_B)d\mu \ \leq \ \left(\int_\Omega (\mathcal{M}_\beta(w\chi_B))^s\, d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \mu\left(\widetilde{B}\right)^{1-\frac{1}{s}}$$

$$\begin{aligned} &\leq \ C' \left(\int_B w^s d\mu \right)^{\frac{1}{s}} (C\mu(B))^{1-\frac{1}{s}} \\ &\leq \ C \int_B w \ d\mu \leq C' \int_{\frac{1}{2}B} w \ d\mu, \end{aligned}$$

dado que $w \in A_p^\beta$ implica que w duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$.

(ii)⇒(iii). Veamos que basta probar

$$\int_B w \log^+ \frac{w}{w_B} d\mu \leq C \int_B w \ d\mu, \tag{2.2.33}$$

para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$. Sean $B = B(x,r) \in \mathcal{F}_\beta$ y $f = w\chi_B$. Dadas nuestras hipótesis, sabemos que vale el teorema de diferenciación de Lebesgue en $(\Omega, d|_\Omega, \mu|_\Omega)$ (ver Observación 1.0.19). Así tenemos que $f(x) \leq \mathcal{M}_\beta f(x)$ en casi todo $x \in \Omega$. Entonces, es claro que (ii) implica que w duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$. De este modo, si $C' \geq 1$ es una constante de duplicación de w sobre $\mathcal{F}_\beta$, tenemos

$$w_B = \frac{w(B)}{\mu(B)} \leq C' \frac{w\left(\frac{1}{2}B\right)}{\mu(B)} \leq C' w_{\frac{1}{2}B}$$

y, si vale (2.2.33), resulta

$$\begin{aligned} \int_B w \log^+ \frac{w}{w_{\frac{1}{2}B}} d\mu \ &= \ \int_{\left\{x\in B: w_{\frac{1}{2}B} \leq w(x) \leq C' w_{\frac{1}{2}B}\right\}} w \log \frac{w}{w_{\frac{1}{2}B}} d\mu \\ &\quad + \int_{\left\{x\in B: w(x) > C' w_{\frac{1}{2}B}\right\}} w \log \frac{w}{w_{\frac{1}{2}B}} d\mu \\ &\leq \ \log C' w(B) + \int_{\left\{x\in B: w(x) > C' w_{\frac{1}{2}B}\right\}} w \left(\log \frac{w}{w_B} + \log \frac{w_B}{w_{\frac{1}{2}B}} \right) d\mu \\ &\leq \ \log C' w(B) + \int_{\{x\in B: w(x) > w_B\}} w \log \frac{w}{w_B} d\mu \\ &\quad + \log \frac{w_B}{w_{\frac{1}{2}B}} w(B) \\ &\leq \ (2\log C' + C) w(B) \leq (2\log C' + C) C' w\left(\frac{1}{2}B\right), \end{aligned}$$

por lo que se verifica (iii).

Ahora probaremos que (ii) implica (2.2.33). Sean B y f como antes. Veamos que vale la estimación

$$\int_{\{\mathcal{M}_\beta f > w_B\}} \mathcal{M}_\beta f \ d\mu \leq C \int_B w \ d\mu, \tag{2.2.34}$$

con C independiente de B. Si $y \notin \mathcal{N}_\beta(B)$, tenemos que $\mathcal{M}_\beta f(y) = 0$, pues dada $B' \in \mathcal{F}_\beta$ para la cual $y \in B'$, resulta $B \cap B' = \varnothing$, y luego $\mu(B')^{-1} \int_{B'} |f| d\mu = 0$. Se sigue que

$$\int_{\{\mathcal{M}_\beta f > w_B\}} \mathcal{M}_\beta f \ d\mu = \int_{\left\{x\in \mathcal{N}_\beta(B): \mathcal{M}_\beta f(x) > w_B\right\}} \mathcal{M}_\beta f \ d\mu.$$

Luego, si $5B \notin \mathcal{F}_\beta$, se tiene a partir de nuestra hipótesis

$$\int_{\{\mathcal{M}_\beta f > w_B\}} \mathcal{M}_\beta f \; d\mu \leq \int_{\mathcal{N}_\beta(B)} \mathcal{M}_\beta f \; d\mu \leq C \int_{\frac{1}{2}B} w \; d\mu.$$

Por otra parte, cuando $5B \in \mathcal{F}_\beta$, aplicando nuevamente (ii) se sigue

$$\int_{\{\mathcal{M}_\beta f > w_B\}} \mathcal{M}_\beta f \; d\mu \leq C \int_{\frac{1}{2}B} w \; d\mu + \int_{(\mathcal{N}_\beta(B) - 5B) \cap \{\mathcal{M}_\beta f > w_B\}} \mathcal{M}_\beta f \; d\mu,$$

por lo que solo debemos estimar el segundo término de la derecha. Sean $y \in \mathcal{N}_\beta(B) - 5B$ y $B' = B(x', r') \in \mathcal{F}_\beta$ tal que $y \in B'$ y $B \cap B' \neq \varnothing$. Entonces, si $z \in B \cap B'$ se tiene

$$5r \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, x') + d(x', y) < r + 2r'$$

por lo que $2r < r'$. Luego, si $y' \in B$,

$$d(y', x') \leq d(y', x) + d(x, z) + d(z, x') < 2r + r' < 2r',$$

de lo cual se deduce $B \subset 2B'$. Entonces $B \subset \widetilde{B'}$, por lo que $\mu(B) \leq C'\mu(B')$ (con C' independiente de B y B') y luego

$$\frac{1}{\mu(B')} \int_{B'} |f| d\mu \leq \frac{C'}{\mu(B)} \int_B w \; d\mu.$$

Así, para cada $y \in \mathcal{N}_\beta(B) - 5B$, tomando supremo sobre las bolas $B' \in \mathcal{F}_\beta$ tales que $y \in B'$, resulta

$$\mathcal{M}_\beta f(y) \leq C' w_B.$$

De este modo se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{(\mathcal{N}_\beta(B) - 5B) \cap \{\mathcal{M}_\beta f > w_B\}} \mathcal{M}_\beta f \; d\mu &\leq C' w_B \mu(\{\mathcal{M}_\beta f > w_B\}) \\ &\leq C' w_B \frac{C_{\mu,\beta}}{w_B} \int_\Omega |f| d\mu = C \int_B w \; d\mu, \end{aligned}$$

donde la constante $C_{\mu,\beta}$ aparece por la desigualdad tipo débil (1,1) de la maximal local (ver Teorema 1.0.4). Con esto se consigue (2.2.34).

Por otro lado, dado $\lambda \geq f_B = w_B$, por Lema 2.2.27, existe $\{B_j\} \subset \mathcal{F}_\beta$ familia disjunta numerable que verifica (2.2.28) y (2.2.29). Como se vio en la demostración del lema, se tiene

$$\cup B_j \subset \{y \in \Omega : \mathcal{M}_\beta f(y) > \lambda\} \subset \cup \widetilde{B_j}.$$

Entonces, siendo de nuevo C' la constante para la cual $\mu\left(\widetilde{V}\right) \leq C'\mu(V)$, para toda $V \in \mathcal{F}_\beta$, resulta

$$\mu(\{y \in \Omega : \mathcal{M}_\beta f(y) > \lambda\}) \;\; \geq \;\; \sum_j \mu(B_j) \geq \frac{1}{C'\lambda} \sum_j \int_{\widetilde{B_j}} f \;\; d\mu$$

$$\geq \frac{1}{C'\lambda}\int_{\cup\widetilde{B_j}} f \quad d\mu \geq \frac{1}{C'\lambda}\int_{\{f>\lambda\}} f \quad d\mu.$$

Así, integrando la desigualdad de arriba con respecto a λ, obtenemos (por Teorema de Fubini)

$$\begin{aligned}
\int_{w_B}^{\infty} \frac{1}{C'\lambda}\int_{\{f>\lambda\}} f \quad d\mu\, d\lambda &\leq \int_{w_B}^{\infty}\int_{\{\mathcal{M}_\beta f>\lambda\}} d\mu\, d\lambda \\
&= \int_{\{\mathcal{M}_\beta f>w_B\}}\int_{w_B}^{\mathcal{M}_\beta f(y)} d\lambda\, d\mu\,(y) \\
&\leq \int_{\{\mathcal{M}_\beta f>w_B\}} \mathcal{M}_\beta f(y) d\mu\,(y) \leq C\int_B w\, d\mu,
\end{aligned}$$

donde aplicamos (2.2.34) en la última estimación. Finalmente, la implicación queda demostrada al observar que (de nuevo por Fubini)

$$\begin{aligned}
\int_{w_B}^{\infty} \frac{1}{\lambda}\int_{\{f>\lambda\}} f \quad d\mu\, d\lambda &= \int_{\{f>w_B\}}\int_{w_B}^{f(y)} \frac{f(y)}{\lambda} d\lambda\, d\mu\,(y) \\
&= \int_{\{f>w_B\}} f(y)\log\frac{f(y)}{w_B} d\mu\,(y) \\
&= \int_B w\log^+\frac{w}{w_B} d\mu.
\end{aligned}$$

(iii)⇒(iv). Veamos primero que w duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$. Sea $B\in\mathcal{F}_\beta$. Entonces, por (iii) y por duplicación de μ, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_B w\, d\mu &= \int_{B\cap\left\{w>2w_{\frac{1}{2}B}\right\}} w\, d\mu + \int_{B\cap\left\{w\leq 2w_{\frac{1}{2}B}\right\}} w\, d\mu \\
&\leq (\log 2)^{-1}\int_{B\cap\left\{w>w_{\frac{1}{2}B}\right\}} w\log\frac{w}{w_{\frac{1}{2}B}} d\mu + 2w_{\frac{1}{2}B}\mu\,(B) \\
&\leq (\log 2)^{-1}\int_B w\log^+\frac{w}{w_{\frac{1}{2}B}} d\mu + 2C'\int_{\frac{1}{2}B} w\, d\mu \\
&\leq \left((\log 2)^{-1} C + 2C'\right)\int_{\frac{1}{2}B} w\, d\mu.
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que (iii) implica (2.2.33) ya que, si $B\in\mathcal{F}_\beta$ y $C'\geq 1$ es una constante de duplicación de μ sobre $\mathcal{F}_\beta$, resulta

$$\begin{aligned}
\int_B w\log^+\frac{w}{w_B} d\mu &= \int_{\{x\in B: w_B\leq w(x)\leq C'w_B\}} w\log\frac{w}{w_B} d\mu \\
&\quad + \int_{\{x\in B: w(x)>C'w_B\}} w\log\frac{w}{w_B} d\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \log C' \int_B w\ d\mu + \int_{\left\{x\in B: w(x) > w_{\frac{1}{2}B}\right\}} w \log \frac{w}{w_{\frac{1}{2}B}} d\mu \\
&\quad + \log \frac{w_{\frac{1}{2}B}}{w_B} \int_{\{x\in B: w(x) > C' w_B\}} w\ d\mu \\
&\leq (2\log C' + C) \int_B w\ d\mu.
\end{aligned}$$

Ahora, finalmente, probemos que (2.2.33) implica que la medida inducida por w es comparable a μ sobre $\mathcal{F}_\beta$. Sean $\varepsilon \in (0,1)$, $B \in \mathcal{F}_\beta$, y $E \subset B$, medible. Denotamos

$$E_0 = \left\{ x \in E : w(x) > \frac{\varepsilon \mu(B)}{2\mu(E)} w_B \right\}.$$

Por (2.2.33) se sigue

$$\log^+ \frac{\varepsilon\mu(B)}{2\mu(E)} \int_{E_0} w\ d\mu \leq \int_B w \log^+ \frac{w}{w_B} d\mu \leq C \int_B w\ d\mu. \tag{2.2.35}$$

Por otro lado,

$$\int_{E-E_0} w\ d\mu \leq \int_{E-E_0} \frac{\varepsilon\mu(B)}{2\mu(E)} w_B d\mu \leq \frac{\varepsilon\mu(E-E_0)}{2\mu(E)} \int_B w\ d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_B w\ d\mu,$$

por lo cual, si fuera $\int_{E_0} w\ d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_B w\ d\mu$ se tendría $\int_E w\ d\mu \leq \varepsilon \int_B w\ d\mu$. Así, considerando E tal que $\int_E w\ d\mu > \varepsilon\int_B w\ d\mu$, resulta $\int_{E_0} w\ d\mu > \frac{\varepsilon}{2}\int_B w\ d\mu$, y luego, de (2.2.35),

$$\log \frac{\varepsilon\mu(B)}{2\mu(E)} \leq C \frac{\int_B w\ d\mu}{\int_{E_0} w\ d\mu} < \frac{2C}{\varepsilon},$$

lo cual implica

$$\frac{\varepsilon}{2} e^{-2C/\varepsilon}\mu(B) < \mu(E).$$

Entonces, tomando $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}e^{-2C/\varepsilon}$, se deduce que $\int_E w\ d\mu \leq \varepsilon \int_B w\ d\mu$, si E es tal que $\mu(E) \leq \alpha\mu(B)$.

(iv)⇒(i). Por Corolario 2.2.24, existen $C > 0$ y $s > 1$ tales que, para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$,

$$\left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B w^s\ d\mu \right)^{\frac{1}{s}} \leq C \frac{1}{\mu(B)} \int_B w\ d\mu.$$

Sea $d\nu = w\ d\mu$. Si $B \in \mathcal{F}_\beta$, de la desigualdad anterior se sigue

$$\frac{1}{\int_B w^{-1} d\nu} \int_B w^{s-1} d\nu \leq C^s \frac{\nu(B)^s}{\left(\int_B w^{-1} d\nu\right)^s},$$

y luego

$$\left(\int_B w^{-1} d\nu \right)^{s-1} \int_B w^{s-1} d\nu \leq C^s \nu(B)^s,$$

o sea,

$$\int_B w^{-1}d\nu \left(\int_B \left(w^{-1}\right)^{1-s} \, d\nu \right)^{\frac{1}{s-1}} \leq C^{\frac{s}{s-1}} \nu \left(B\right)^{1+\frac{1}{s-1}} .$$

Por lo tanto, si se toma $q = 1 + \frac{1}{s-1}$, resulta $w^{-1} \in A_q^{\beta}(\nu)$, esto es la clase A_q sobre $\mathcal{F}_\beta$ con respecto a la medida ν. Entonces, hemos visto que si un peso verifica una desigualdad tipo Hölder inversa, sobre una familia $\mathcal{F}_\beta$, con respecto a una cierta medida regular, hay un $q \in (1, \infty)$ para el cual el inverso de tal peso está en la clase A_q^{β} con respecto a la medida inducida por el peso. Ahora, ya que ν es una medida de Borel que duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$ y es regular en el espacio métrico $(\Omega, d|_\Omega)$, se puede obtener una desigualdad tipo Hölder inversa con respecto a ν para w^{-1} sobre $\mathcal{F}_\beta$, por Corolario 2.2.26. Por el argumento previo, hay un $p \in (1, \infty)$ tal que w está en la clase A_p^{β} con respecto a la medida inducida por w^{-1}, la cual es μ. $\square$

2.3. Demostración del Teorema 2.1.8

Con los resultados previos a la demostración del Teorema 2.2.1, podemos probar el Teorema 2.1.8. Pero antes es necesario ver que Tf está bien definida c. t. p. en Ω, para f tal que $\frac{f}{w} \in L^\infty(\Omega)$. En lo que sigue, para $1 \leq p \leq \infty$, se denotará con $L^p_{loc}(\Omega)$ al conjunto de las funciones medibles $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que $f\chi_{\mathcal{K}} \in L^p(\Omega, d\mu)$, para cualquier $\mathcal{K}$ que sea unión finita de bolas de $\bigcup\limits_{\beta\in(0,1)} \mathcal{F}_\beta$.

Observación 2.3.1. Sean $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ y T un operador integral singular β-local. Veamos que Tf está bien definida c. t. p. de Ω. En efecto, sean B y B' en $\mathcal{F}_\beta$ tales que $B \cap B' \neq \varnothing$. Si $\{P_i\} \subset \mathcal{F}_\beta$ es un cubrimiento tipo Whitney de Ω dado por el Lema 1.0.6, por (iii) (del lema), los conjuntos $\mathcal{S}_\beta(B)$ y $\mathcal{S}_\beta(B')$ están cubiertos por una cantidad finita de bolas P_i. Entonces, por el Teorema 1.0.12, $T\left(f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right)$ y $T\left(f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B')}\right)$ están bien definidas en c. t. p. de Ω ya que $f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}$ y $f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B')}$ están en $L^p(\Omega, d\mu)$. Ahora, probemos que $T\left(f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right) = T\left(f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B')}\right)$ c. t. p. de Ω. Sean $\mathcal{K}$ una unión finita de bolas de $\bigcup\limits_{\alpha\in(0,1)} \mathcal{F}_\alpha$ tal que $\mathcal{S}_\beta(B) \cup \mathcal{S}_\beta(B') \subset \mathcal{K}$, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas con soporte acotado en Ω tal que $f_n \to f\chi_{\mathcal{K}}$ en $L^p(\Omega, d\mu)$ y en c. t. p. de Ω. Entonces, $f_n\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)} \to f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}$ y $f_n\chi_{\mathcal{S}_\beta(B')} \to f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B')}$, donde $f_n\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}$ y $f_n\chi_{\mathcal{S}_\beta(B')}$ están en $L^\infty_c(\Omega)$. Además, para cada n, ya que si $x \in B \cap B'$ tenemos $B(x, \beta d(x, \Omega^c)) \subset \mathcal{S}_\beta(B) \cap \mathcal{S}_\beta(B')$, resulta $T\left(f_n\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)-\mathcal{S}_\beta(B')}\right) = T\left(f_n\chi_{\mathcal{S}_\beta(B')-\mathcal{S}_\beta(B)}\right) = 0$ c. t. p. en $B \cap B'$, por 2 de la Definición 2.1.7. Luego, para cada n resulta

$$\begin{aligned} T\left(f_n\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right) &= T\left(f_n\left(\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)} - \chi_{\mathcal{S}_\beta(B')}\right)\right) + T\left(f_n\chi_{\mathcal{S}_\beta(B')}\right) \\ &= T\left(f_n\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)-\mathcal{S}_\beta(B')}\right) - T\left(f_n\chi_{\mathcal{S}_\beta(B')-\mathcal{S}_\beta(B)}\right) + T\left(f_n\chi_{\mathcal{S}_\beta(B')}\right) \\ &= T\left(f_n\chi_{\mathcal{S}_\beta(B')}\right), \end{aligned}$$

en c. t. p. de $B \cap B'$. Así obtenemos

$$T\left(f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right) = \lim_{n\to\infty} T\left(f_n\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right) = \lim_{n\to\infty} T\left(f_n\chi_{\mathcal{S}_\beta(B')}\right) = T\left(f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B')}\right),$$

en c. t. p. de $B \cap B'$. Ahora, para cada i podemos definir

$$Tf = T\left(f\chi_{\mathcal{S}_\beta(P_i)}\right)$$

c. t. p. de P_i. Como $\Omega = \underset{i}{\cup} P_i$ y, si $P_i \cap P_k \neq \varnothing$, $T\left(f\chi_{\mathcal{S}_\beta(P_i)}\right) = T\left(f\chi_{\mathcal{S}_\beta(P_k)}\right)$ c. t. p. de $P_i \cap P_k$, Tf queda bien definida c. t. p. de Ω.

Observación 2.3.2. Si w es un peso local y $\frac{f}{w} \in L^\infty(\Omega)$, para cada $\mathcal{K}$ que sea unión finita de bolas de $\underset{\beta\in(0,1)}{\cup} \mathcal{F}_\beta$ tenemos

$$|f|\chi_{\mathcal{K}} \leq \left\|\frac{f}{w}\right\|_\infty w\chi_{\mathcal{K}} \in L^1_c(\Omega).$$

De este modo, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ y, por la observación anterior, Tf esta bien definida c. t. p. de Ω.

Observación 2.3.3. La Observación 2.3.1 también nos permitirá ver que Tf esta bien definida c. t. p. de Ω cuando $f \in BMO^\beta_w$.

Antes de probar el Teorema 2.1.8 daremos el siguiente lema que se usará en su demostración.

Lema 2.3.4. *Sean T una integral singular β-local y $w \in A^\beta_\infty$. Entonces, dadas $B \in \mathcal{F}_\beta$ y una función g con soporte en $\widetilde{B}$ tal que $\frac{g}{w} \in L^\infty(\Omega)$, se tiene*

$$\int_B |Tg|d\mu \leq C\left\|\frac{g}{w}\right\|_\infty w(B),$$

donde C es una constante independiente de B y g, y $\widetilde{B}$ es como en (ii) del Teorema 2.2.1.

Demostración. Por un lado, por el Corolario 2.2.26, hay un $s > 1$ tal que w verifica una desigualdad tipo Hölder inversa sobre $\mathcal{F}_\beta$. No es difícil ver que, mediante esta desigualdad y la de Hölder usual, w^s duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$. Luego, por el Lema 3.1 en [HSV14] página 618 (Lema 1.0.8), hay una constante $C > 0$ que verifica

$$w^s\left(\widetilde{V}\right) \leq Cw^s(V),$$

para toda $V \in \mathcal{F}_\beta$. Por otro lado, tenemos

$$|g|^s \leq \left\|\frac{g}{w}\right\|^s_\infty w^s\chi_{\widetilde{B}}$$

c. t. p. de Ω, siendo

$$\int_\Omega w^s\chi_{\widetilde{B}}d\mu \leq C\frac{w^s(B)}{\mu(B)}\mu(B) \leq Cw(B)^s\mu(B)^{1-s},$$

por lo que $g \in L^s(\Omega)$. Entonces, como T es acotado sobre $L^s(\Omega, d\mu)$ (ver [HSV19]), resulta

$$\int_B |Tg|d\mu \quad\leq\quad \left(\int_\Omega |Tg|^s d\mu\right)^{1/s} \mu(B)^{1/s'}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\left(\int_{\Omega}|g|^{s}d\mu\right)^{1/s}\mu(B)^{1-1/s}\\
&\leq C\left\|\frac{g}{w}\right\|_{\infty}\left(w^{s}\left(\widetilde{B}\right)\right)^{1/s}\mu(B)^{1-1/s}\\
&\leq C\left\|\frac{g}{w}\right\|_{\infty}w\left(B\right).
\end{aligned}
$$

□

Observación 2.3.5. Sean T una integral singular β-local, $w\in A_{\infty}^{\beta}$ y $B\in\mathcal{F}_{\beta}$. Veamos que, en general, si $h\in L_{loc}^{1}$ y $\frac{h}{w}\in L^{\infty}(\Omega)$, Th es integrable sobre B. En efecto, si ξ es el centro de B, como vimos en la Observación 2.3.1 resulta

$$Th=T\left(h\chi_{\mathcal{S}_{\beta}(B(\xi,\beta\rho(\xi)))}\right),$$

c. t. p. de $B(\xi,\beta\rho(\xi))$, y así, por el Lema 2.3.4 tenemos

$$\int_{B}|Th|d\mu\leq\int_{B(\xi,\beta\rho(\xi))}|Th|d\mu\leq C\left\|\frac{h\chi_{\mathcal{S}_{\beta}(B(\xi,\beta\rho(\xi)))}}{w}\right\|_{\infty}w(B(\xi,\beta\rho(\xi))).$$

Demostración del Teorema 2.1.8. Tomamos f tal que $\frac{f}{w}\in L^{\infty}\left(\Omega\right)$, $B\in\mathcal{F}_{\beta}$, y denotamos $f_{1}=f\chi_{\widetilde{B}}$ y $f_{2}=f\chi_{S_{\beta}(B)-\widetilde{B}}$, siendo $\widetilde{B}$ como en (ii) del Teorema 2.2.1 (observar que $f_{2}=0$ si $5B\notin\mathcal{F}_{\beta}$). Entonces, dado que, por la Observación 2.3.5, Tf_{1} y Tf_{2} son integrables sobre B, podemos escribir

$$
\begin{aligned}
\int_{B}\left|Tf-\left(Tf_{2}\right)_{B}\right|d\mu &= \int_{B}\left|Tf_{1}+Tf_{2}-\left(Tf_{2}\right)_{B}\right|d\mu\\
&\leq \int_{B}\left|Tf_{1}\right|d\mu+\int_{B}\left|Tf_{2}-\left(Tf_{2}\right)_{B}\right|d\mu. \qquad (2.3.6)
\end{aligned}
$$

Ahora, por el Lema 2.3.4 resulta

$$\int_{B}\left|Tf_{1}\right|d\mu\leq C'\left\|\frac{f}{w}\right\|_{\infty}w\left(B\right). \qquad (2.3.7)$$

Así, sólo nos queda estimar el segundo término de (2.3.6). Para ello, considerando la propiedad 2 de la Definición 2.1.7, con $B=B\left(\xi,r\right)$, se sigue

$$
\begin{aligned}
&\int_{B}\left|Tf_{2}-\left(Tf_{2}\right)_{B}\right|d\mu\\
\leq{}& \mu\left(B\right)^{-1}\int_{B}\int_{B}\left|Tf_{2}\left(z\right)-Tf_{2}\left(z'\right)\right|d\mu\left(z'\right)d\mu\left(z\right)\\
\leq{}& \mu\left(B\right)^{-1}\int_{B}\int_{B}\int_{S_{\beta}(B)-5B}\left|K\left(z,y\right)-K\left(z',y\right)\right|\left|f\left(y\right)\right|d\mu\left(y\right)d\mu\left(z'\right)d\mu\left(z\right)\\
\leq{}& \int_{B}\int_{S_{\beta}(B)-5B}\left|K\left(z,y\right)-K\left(\xi,y\right)\right|\left|f\left(y\right)\right|d\mu\left(y\right)d\mu\left(z\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +\int_B \int_{S_\beta(B)-5B} |K(\xi,y)-K(z',y)|\,|f(y)|\,d\mu(y)\,d\mu(z') \\
= \;& 2\int_B \int_{S_\beta(B)-5B} |K(z,y)-K(\xi,y)|\,|f(y)|\,d\mu(y)\,d\mu(z).
\end{aligned}
$$

Entonces, teniendo en cuenta que $w \in B_\delta^\beta$ donde δ es el exponente en la propiedad 3.(ii) de la Definición 2.1.7, se tiene

$$
\begin{aligned}
& \int_B |Tf_2-(Tf_2)_B|\,d\mu \\
\leq \;& C\int_B \int_{S_\beta(B)-5B} \mu(B(\xi,d(\xi,y)))^{-1}\left(\frac{d(\xi,z)}{d(\xi,y)}\right)^\delta |f(y)|\,d\mu(y)\,d\mu(z) \\
\leq \;& C\left\|\frac{f}{w}\right\|_\infty \int_{S_\beta(5B)-5B} \frac{\mu(5B)(5r)^\delta w(y)}{\mu(B(\xi,d(\xi,y)))\,d(\xi,y)^\delta}d\mu(y) \\
\leq \;& C'\left\|\frac{f}{w}\right\|_\infty w(5B) \leq C''\left\|\frac{f}{w}\right\|_\infty w(B). \qquad (2.3.8)
\end{aligned}
$$

De este modo, llevando (2.3.7) y (2.3.8) a (2.3.6), obtenemos

$$
w(B)^{-1}\int_B |Tf-(Tf_2)_B|\,d\mu \leq C\left\|\frac{f}{w}\right\|_\infty, \qquad (2.3.9)
$$

para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$. Por lo tanto, ya que se tiene $\int_B |Tf-(Tf)_B|\,d\mu \leq 2\int_B |Tf-a|\,d\mu$, para cualquier $a \in \mathbb{R}$, por (2.3.7), (2.3.9), y el Lema 2.1.6, se deduce

$$
\|Tf\|_{BMO_w^\beta} \leq C\left\|\frac{f}{w}\right\|_\infty.
$$

□

2.4. Caracterización de pesos A_∞^{loc} mediante transformadas de Riesz

Cuando $X=\mathbb{R}^n$, d es la métrica euclídea usual y μ la medida de Lebesgue, consideramos los siguientes operadores de tipo *transformadas de Riesz locales* definidos por

$$
R_j^{\beta,\eta}f(x) = \text{v.p.}\int_\Omega \frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta d(x,\Omega^c)}\right)f(y)dy\,,
$$

para $x \in \Omega$ y para cada $j=1,...,n$, con f definida sobre Ω . Aquí, η es una función $\mathcal{C}^\infty([0,\infty))$ tal que $0 \leq \eta \leq 1$, con $\eta(t)=1$ si $0 \leq t < \frac{1}{2}$, y $\eta(t)=0$ si $t \geq 1$. También denotaremos

$$
K_j^{\beta,\eta}(x,y) = K_j(x-y)\,\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta d(x,\Omega^c)}\right) \qquad (2.4.1)
$$

siendo, como es usual, $K_j(z) = z_j|z|^{-n-1}$, para cada $z \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Ya que la función η permanecerá fija en los resultados que presentaremos, escribiremos directamente $K_j^\beta = K_j^{\beta,\eta}$ y $R_j^\beta = R_j^{\beta,\eta}$.

Lema 2.4.2. *Sea $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $w \geq 0$ c. t. p. de Ω. Entonces, para cada $j = 1, \dots, n$, son equivalentes las siguientes condiciones*

(i) existe una constante $C > 0$ que verifica, para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$,

$$\int_{\widetilde{B}} \left| R_j^\beta(w\chi_B) \right| dx \leq C \int_B w\ dx;$$

(ii) existe una constante $C > 0$ que verifica, para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$,

$$\int_{\widetilde{B}} |R_j(w\chi_B)|\, dx \leq C \int_B w\ dx;$$

donde $\widetilde{B}$ es como en (ii) del Teorema 2.2.1.

Demostración. **(i)⇒(ii).** Sean $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_\beta$ y $f = w\chi_B$. Se tiene

$$\int_{\widetilde{B}} |R_j f(x)|\, dx \leq I + II, \tag{2.4.3}$$

donde

$$I = \int_{\widetilde{B}} \text{v.p.} \left| \int_{\left\{y \in B : |x-y| < \frac{1}{2}\beta d(x,\Omega^c)\right\}} K_j(x-y) f(y) dy \right| dx$$

y

$$II = \int_{\widetilde{B}} \text{v.p.} \left| \int_{\left\{y \in B : |x-y| \geq \frac{1}{2}\beta d(x,\Omega^c)\right\}} K_j(x-y) f(y) dy \right| dx.$$

Para estimar I, dado $x \in \widetilde{B}$, desde (2.4.1) notamos que $K_j(x-y) = K_j^\beta(x,y)$ cuando $y \in B\left(x, \frac{1}{2}\beta d(x,\Omega^c)\right)$, y $\left|K_j^\beta\right| \leq |K_j|$. Luego, se sigue

$$\begin{aligned}
&\text{v.p.} \left| \int_{\left\{y \in B : |x-y| < \frac{1}{2}\beta d(x,\Omega^c)\right\}} K_j(x-y) f(y) dy \right| \\
= &\left| R_j^\beta f(x) - \int_{\left\{y \in B : |x-y| \geq \frac{1}{2}\beta d(x,\Omega^c)\right\}} K_j^\beta(x,y) w(y) dy \right| \\
\leq &\left| R_j^\beta f(x) \right| + \int_{\left\{y \in B : |x-y| \geq \frac{1}{2}\beta d(x,\Omega^c)\right\}} |K_j(x-y)|\, w(y) dy \\
\leq &\left| R_j^\beta f(x) \right| + \left(\frac{2}{\beta d(x,\Omega^c)} \right)^n \int_B w\ dy.
\end{aligned}$$

Entonces
$$I \leq \int_{\widetilde{B}} \left| R_j^\beta f(x) \right| dx + 2^n \int_{\widetilde{B}} \left(\beta d\left(x, \Omega^c\right)\right)^{-n} dx \int_B w\ dy. \tag{2.4.4}$$

Para II, si $x \in \widetilde{B}$ resulta

$$\left| \int_{\left\{y \in B : |x-y| \geq \frac{1}{2}\beta d(x,\Omega^c)\right\}} K_j(x-y) f(y) dy \right| \leq \left(\frac{2}{\beta d\left(x, \Omega^c\right)} \right)^n \int_B w\ dy,$$

por lo que
$$II \leq 2^n \int_{\widetilde{B}} \left(\beta d\left(x, \Omega^c\right)\right)^{-n} dx \int_B w\ dy. \tag{2.4.5}$$

Entonces, llevando (2.4.4) y (2.4.5) a (2.4.3), se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{B}} \left| R_j f(x) \right| dx &\leq \int_{\widetilde{B}} \left| R_j^\beta f(x) \right| dx \\
&\quad + 2^{n+1} \int_{\widetilde{B}} \left(\beta d\left(x, \Omega^c\right)\right)^{-n} dx \int_B w\ dy \\
&\leq \left(C + 2^{n+1} \int_{\widetilde{B}} \left(\beta d\left(x, \Omega^c\right)\right)^{-n} dx \right) \int_B w\ dy,
\end{aligned}$$

por lo cual, para probar (ii), basta ver que $\int_{\widetilde{B}} \left(\beta d\left(x, \Omega^c\right)\right)^{-n} dx$ está acotada por una constante independiente de $\widetilde{B}$. Para ello, primero, suponemos $5r \leq \beta d\left(\xi, \Omega^c\right)$. Se tiene entonces $5r(\frac{1}{\beta} - 1) \leq d\left(x, \Omega^c\right)$, para $x \in 5B = \widetilde{B}$. Así resulta

$$\int_{\widetilde{B}} \left(\beta d\left(x, \Omega^c\right)\right)^{-n} dx \leq \int_{5B} (5r(1-\beta))^{-n} dx = |B(0,1)| \, (1-\beta)^{-n}.$$

Por otro lado, para $5r > \beta d\left(\xi, \Omega^c\right)$, se tiene $\widetilde{B} = \mathcal{N}_\beta(B)$. Entonces, por la Observación 1.0.7 y el Lema 1.0.8 resulta

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{B}} \left(\beta d\left(x, \Omega^c\right)\right)^{-n} dx &\leq C_\beta^n \left(\beta d\left(\xi, \Omega^c\right)\right)^{-n} \left|\mathcal{N}_\beta(B)\right| \leq C_\beta^n r^{-n} \left|\mathcal{N}_\beta(B)\right| \\
&\leq C_{\beta,n} r^{-n} |B| = C_{\beta,n},
\end{aligned}$$

donde $C_{\beta,n}$ es una constante que depende solo de β y n.

(ii)⇒(i). Si $B \in \mathcal{F}_\beta$ y $f = w\chi_B$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left| R_j^\beta f(x) \right| &\leq \left| \text{v.p.} \int_{\{y \in B : |x-y| < \frac{1}{2}\beta d(x,\Omega^c)\}} K_j(x-y) f(y) dy \right| \\
&\quad + \left| \int_{\{y \in B : |x-y| \geq \frac{1}{2}\beta d(x,\Omega^c)\}} K_j^\beta(x,y) f(y) dy \right| \\
&\leq \left| R_j f(x) \right| + 2 \int_{\{y \in B : |x-y| \geq \frac{1}{2}\beta d(x,\Omega^c)\}} \left| K_j(x-y) \right| w(y) dy
\end{aligned}$$

$$\leq \quad |R_j f(x)| + 2\left(\frac{2}{\beta d(x,\Omega^c)}\right)^n \int_B w\, dy,$$

por lo cual la demostración de esta implicación se sigue análogamente a la anterior. □

Observación 2.4.6. Para cada $j = 1, \dots, n$, si K_j es como en (2.4.1), definimos la *j-ésima transformada de Riesz truncada local* como

$$\widetilde{R}_j^\beta f(x) = \text{v.p.} \int_{B(x,\beta\rho(x))} K_j(x-y) f(y) dy$$

en c. t. p. $x \in \Omega$, para $f \in L_c^\infty(\Omega)$ (las mismas son consideradas en [HSV19]). Dada una tal f, podemos suponer que está se extiende sobre todo $\mathbb{R}^n$ siendo igual a 0 en Ω^c. Entonces

$$\widetilde{R}_j^\beta f(x) = R_j f(x) - \int_{\mathbb{R}^n - B(x,\beta\rho(x))} K_j(x-y) f(y) dy,$$

de lo cual se deduce que el Lema 2.4.2 también es válido con $\widetilde{R}_j^\beta$ en lugar de R_j^β.

Ahora, para la demostración del resultado principal de esta sección, consideraremos el clásico espacio de Hardy H^1 sobre $\mathbb{R}^n$, el cual definiremos, como en [FS72] (página 144), como el espacio de las funciones $f \in L^1$ tales que

$$\|f\|_{H^1} \doteq \|f\|_{L^1} + \sum_{j=1}^n \|R_j f\|_{L^1} < \infty. \tag{2.4.7}$$

Tomando el núcleo de Poisson

$$P_t(x) = c_n t \left(|x|^2 + t^2\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

para $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$, por el Teorema 4 en [FS72] (página 151) tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} |f * P_t| dx \leq C \|f\|_{H^1}, \tag{2.4.8}$$

para $f \in H^1$, con C independiente de f.

Teorema 2.4.9. *Sea $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ un peso. Entonces, son equivalentes las siguientes condiciones*

(i) hay una constante $C > 0$ que verifica, para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$,

$$\int_{\widetilde{B}} \left| R_j^\beta (w\chi_B) \right| dx \leq C \int_B w\, dx,$$

para cada $j = 1, \dots, n$;

(ii) hay una constante $C > 0$ que verifica, para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$,

$$\int_{\widetilde{B}} \mathcal{M}_\beta (w\chi_B) dx \leq C' \int_B w\, dx.$$

Demostración. **(i)⇒(ii).** Sean $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_\beta$ y $f = w\chi_B$. Elegiremos un $\zeta \in \mathbb{R}^n$ con $|\zeta| = \delta r$, donde $0 < \delta < 1$ se determinará solo dependiendo de β y lo suficientemente pequeño de modo que, al definir $g(z) = -f(z+\zeta)$ para $z \in \mathbb{R}^n$, se obtenga

$$\int_{\mathbb{R}^n} |R_j(f+g)|\, dx \leq C \int_B w\ dx. \tag{2.4.10}$$

Para fijar ideas, procedamos con la demostración suponiendo que escogimos un tal ζ y obtuvimos la desigualdad anterior. Ya que $\|f+g\|_{L^1} \leq 2\|f\|_{L^1} = 2\int_B w\ dx$, (2.4.10) implica

$$\|f+g\|_{L^1} + \sum_{j=1}^n \|R_j(f+g)\|_{L^1} \leq C \int_B w\ dx,$$

por lo que, de (2.4.7), $f+g \in H^1$ y luego

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} |(f+g)*P_t|\, dx \leq C\|f+g\|_{H^1} \leq C' \int_B w\ dx, \tag{2.4.11}$$

debido a (2.4.7) y (2.4.8). Ahora, veamos que podemos obtener, para todos $s > 0$ y $x \in \widetilde{B}$, la estimación

$$s^{-n} \int_{|x-y|<s} f(y)dy \leq C\left(w_B + \sup_{t>0} |((f+g)*P_t)(x)|\right). \tag{2.4.12}$$

Sea $\lambda > 1$ arbitrario. Cuando $\frac{\delta r}{1+\lambda} \leq s$ se obtiene

$$s^{-n} \int_{|x-y|<s} f(y)dy \leq c_n \left(\frac{1+\lambda}{\delta}\right)^n w_B\ . \tag{2.4.13}$$

Por otro lado, sea $\frac{\delta r}{1+\lambda} > s$. Si $|x-y| < s$ entonces

$$\left(1 + \frac{|x-y|^2}{s^2}\right)^{-\frac{n+1}{2}} > 2^{-\frac{n+1}{2}}$$

y

$$(1+\lambda)s < |\zeta| \leq |\zeta + x - y| + |x-y| < |\zeta + x - y| + s,$$

o sea,

$$|x - y + \zeta| > \lambda s,$$

por lo que

$$\left(1 + \frac{|x-y|^2}{s^2}\right)^{-\frac{n+1}{2}} - \left(1 + \frac{|x-y+\zeta|^2}{s^2}\right)^{-\frac{n+1}{2}} > 2^{-\frac{n+1}{2}} - (1+\lambda^2)^{-\frac{n+1}{2}} > 0,$$

para cada $y \in B(x,s)$. Entonces

$$\left(2^{-\frac{n+1}{2}} - (1+\lambda^2)^{-\frac{n+1}{2}}\right) s^{-n} \int_{|x-y|<s} f(y)dy$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(s\left(|x-y|^2+s^2\right)^{-\frac{n+1}{2}} - s\left(|x-y+\zeta|^2+s^2\right)^{-\frac{n+1}{2}} \right) f(y)dy \\ &= c_n^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} P_s\left(x-y\right) f(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} P_s\left(x+\zeta-y\right) f(y)dy \right) \\ &\leq c_n^{-1} \sup_{t>0} \left| \left((f+g) * P_t \right)(x) \right|. \end{aligned}$$

Así, tomando $\lambda = \sqrt{2}$, en este caso tenemos

$$s^{-n} \int_{|x-y|<s} f(y)dy \leq \left(c_n \left(2^{-\frac{n+1}{2}} - 3^{-\frac{n+1}{2}} \right) \right)^{-1} \sup_{t>0} \left| \left((f+g) * P_t \right)(x) \right|. \tag{2.4.14}$$

Luego, (2.4.13) y (2.4.14) prueban (2.4.12). Finalmente, tomando supremo sobre $s > 0$ en (2.4.12) y aplicando (2.4.11), se consigue

$$\begin{aligned} \int_{\widetilde{B}} \mathcal{M}_\beta(w\chi_B)dx &\leq C \int_{\widetilde{B}} \sup_{s>0} s^{-n} \int_{|x-y|<s} f(y)dydx \\ &\leq C' \frac{\left|\widetilde{B}\right|}{|B|} \int_B w\ dx \\ &\quad +C' \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} \left|(f+g) * P_t\right| dx \\ &\leq C'' \int_B w\ dx, \end{aligned}$$

por duplicación sobre $\mathcal{F}_\beta$ de la medida de Lebesgue.

Ahora determinaremos $\zeta \in \mathbb{R}^n$ con $|\zeta| = \delta r$ de modo que valga (2.4.10). En un principio, pedimos $\delta < \text{mín}\left\{1, \frac{1-\beta}{\beta}\right\}$. Supongamos $B \in \mathcal{F}_{\beta/5}$. Se observa que $|\zeta| < (1-\beta)\rho(\xi)$ donde denotamos $\rho(x) = d(x, \Omega^c)$. Entonces, $B(\xi+\zeta, r) \subset B(\xi, \rho(\xi))$ y $2|\zeta| < 4r$. Por otro lado, estimamos (como es usual) la condición de suavidad para los núcleos K_j. De hecho, dado que, para cada $z \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, se tiene

$$\left|\nabla K_j\left(z\right)\right| \leq \sqrt{n}\left(n+2\right)|z|^{-n-1},$$

por teorema del valor medio del cálculo en varias variables y la desigualdad de Schwartz, se deduce

$$\left|K_j\left(x\right) - K_j\left(x-y\right)\right| \leq \sqrt{n}\left(n+2\right) \frac{|y|}{\left(\alpha|x|\right)^{n+1}}, \tag{2.4.15}$$

siempre que $x \neq 0$ y $|x-y| \geq \alpha|x|$, con $0 < \alpha \leq 1$. De este modo, la estimación anterior nos proporciona

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n - 5B} \left|R_j(f+g)\right| dx \\ \leq &\int_B w(z) \int_{|x-z|>2|\zeta|} \left|K_j(x-z) - K_j(x-z+\zeta)\right| dxdz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_B w(z) \int_{|x-z|>2|\zeta|} \frac{\sqrt{n}\,(n+2)\,|\zeta|}{(2^{-1}|x-z|)^{n+1}} dxdz \\
&\leq 2^{n+1}\sqrt{n}\,(n+2)\,|S^{n-1}| \int_B w(z)|\zeta| \int_{2|\zeta|}^{\infty} t^{-2} dtdz \\
&= 2^n\sqrt{n}\,(n+2)\,|S^{n-1}| \int_B w\; dz. \qquad (2.4.16)
\end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{5B} |R_j g(x)|\,dx &= \int_{5B} |R_j f(x+\zeta)|\,dx \leq \int_{B(\xi,5r+|\zeta|)} |R_j f(x)|\,dx \\
&\leq \int_{6B-5B} |R_j f(x)|\,dx + \int_{5B} |R_j f(x)|\,dx \\
&\leq \int_B w(y) \int_{4r\leq|x-y|<7r} |x-y|^{-n} dxdy + \int_{5B} |R_j f(x)|\,dx \\
&\leq |S^{n-1}|\ \log\frac{7}{4} \int_B w\; dy + \int_{5B} |R_j f(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

y luego, por el Lema 2.4.2 y la hipótesis dada, resulta

$$\begin{aligned}
\int_{5B} |R_j(f+g)|\,dx &\leq |S^{n-1}|\ \log\frac{7}{4} \int_B w\; dy + 2\int_{5B} |R_j f(x)|\,dx \\
&\leq C \int_B w\; dy. \qquad (2.4.17)
\end{aligned}$$

Entonces, sumando (2.4.16) y (2.4.17) se obtiene (2.4.10). Supongamos ahora $B \notin \mathcal{F}_{\frac{\beta}{5}}$. En este caso $\widetilde{B} = \mathcal{N}_\beta(B)$. Tomando $\delta < \frac{1-\beta}{2}$ tenemos $\delta < \text{mín}\left\{1,\ \frac{1-\beta}{\beta}\right\}$ y, para cada $z \in B$, $2\,|\zeta| < \beta(1-\beta)\rho(\xi) \leq \beta\rho(z)$, por lo cual $B(z, 2|\zeta|) \in \mathcal{F}_\beta$. Luego, si para $x \in \Omega$ hay un $z \in B$ que verifica $|x-z| \leq 2\,|\zeta|$, entonces $x \in \mathcal{N}_\beta(B)$. Se deduce de esto y (2.4.15) (como se hizo para probar (2.4.16))

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n-\mathcal{N}_\beta(B)} |R_j(f+g)|\ dx \\
&\leq \int_B w(z) \int_{\mathbb{R}^n-\mathcal{N}_\beta(B)} |K_j(x-z) - K_j(x-z+\zeta)|\,dxdz \\
&\leq \int_B w(z) \int_{|x-z|>2|\zeta|} |K_j(x-z) - K_j(x-z+\zeta)|\,dxdz \\
&\leq 2^n\sqrt{n}\,(n+2)\,|S^{n-1}| \int_B w\; dz. \qquad (2.4.18)
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{N}_\beta(B)} |R_j(f+g)|\ dx \\
&\leq \int_{\mathcal{N}_\beta(B)} |R_j f(x)|\,dx + \int_{\mathcal{N}_\beta(B)} |R_j f(x+\zeta)|\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le \int_{\mathcal{N}_\beta(B)} |R_j f(x)|\,dx + \int_{\mathcal{N}_\beta(B)-\zeta} |R_j f(x+\zeta)|\,dx \\
&\quad + \int_{\mathcal{N}_\beta(B)-(\mathcal{N}_\beta(B)-\zeta)} |R_j f(x+\zeta)|\,dx \\
&\le 2\int_{\mathcal{N}_\beta(B)} |R_j f(x)|\,dx + \int_{\mathcal{N}_\beta(B)-(\mathcal{N}_\beta(B)-\zeta)} |R_j f(x+\zeta)|\,dx. \qquad (2.4.19)
\end{aligned}$$

Para estimar la última integral, sean $x \in \mathcal{N}_\beta(B)$ y $B' = B(x', r') \in \mathcal{F}_\beta$ tal que $x \in B'$ y $B \cap B' \neq \varnothing$. Como se vio en la Observación 1.0.7, existe $C > 0$, dependiente solo de β, tal que $r' \le \beta\rho(x') \le C\beta\rho(\xi) < 5Cr$. Luego, si $x'' \in B \cap B'$ se tiene, para todo $z \in B$,

$$|x+\zeta-z| \le |x-x'| + |x'-x''| + |x''-z| + \delta r < C_\beta r\ . \qquad (2.4.20)$$

Además, como se probó anteriormente, para cualquier $z \in B$, $B(z, 2|\zeta|) \in \mathcal{F}_\beta$ y, luego, si $|x+\zeta-z| < 2\,|\zeta|$ entonces $x+\zeta \in \mathcal{N}_\beta(B)$. Dicho de otro modo, si $x \notin \mathcal{N}_\beta(B)-\zeta$ entonces

$$|x+\zeta-z| \ge 2\,|\zeta|\,, \qquad (2.4.21)$$

para cada $z \in B$. Así, con (2.4.20) y (2.4.21), se deduce

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{N}_\beta(B)-(\mathcal{N}_\beta(B)-\zeta)} |R_j f(x+\zeta)|\,dx \\
&\le \int_B w(z) \int_{2\delta r \le |x+\zeta-z| < C_\beta r} |x+\zeta-z|^{-n} dx dz \\
&\le |S^{n-1}|\ \log\frac{C_\beta}{2\delta} \int_B w\ dz,
\end{aligned}$$

por lo cual, por la hipótesis dada y el Lema 2.4.2, se tiene en (2.4.19)

$$\int_{\mathcal{N}_\beta(B)} |R_j(f+g)|\,dx \le C\int_B w\ dx. \qquad (2.4.22)$$

De este modo, sumando (2.4.18) y (2.4.22) se obtiene (2.4.10) en este caso. Esto completa la demostración.

(ii)⇒(i). Se puede observar que, en la demostración del Teorema 2.2.1, cuando se prueba que la condición (ii) implica (iii), en realidad se ve que (ii) del Teorema 2.4.9 implica (2.2.33). Además, al ver que (iii) implica (iv), se prueba que, si w satisface (2.2.33), w es comparable a μ sobre $\mathcal{F}_\beta$. Así, en este caso, w es comparable a la medida de Lebesgue sobre $\mathcal{F}_\beta$. Veamos que w es también un peso duplicante. Dado $\varepsilon = 1/2$, le corresponde un $\alpha \in (0,1)$ de modo que se verifica la desigualdad en (iv) del Teorema 2.2.1. Ahora, tomemos t tal que

$$(1-\alpha)^{1/n} \le t < 1,$$

o sea, $0 < 1 - t^n \le \alpha$. Entonces, dada $B \in \mathcal{F}_\beta$ con radio r, se tiene

$$|B - tB| \ = \ |B\,(0,1)\,|r^n - |B\,(0,1)\,|\,(tr)^n$$

$$= \quad (1-t^n)\,|B| \leq \alpha|B|,$$

y luego

$$w\,(B) - w\,(tB) = w\,(B - tB) \leq \frac{1}{2} w\,(B)\,,$$

o sea,

$$w\,(B) \leq 2w\,(tB)\,,$$

de lo cual se puede deducir que w duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$.

Luego, por las conclusiones anteriores, w verifica (iv) del Teorema 2.2.1, y así, hay un $p \in (1,\infty)$ tal que $w \in A_p^\beta$. Como R_j^β es acotada sobre $L^q\,(\Omega, dx)$, para todos $q \in (1,\infty)$ y $j = 1,\ldots,n$, el resto de esta demostración es como la demostración de que (i) del Teorema 2.2.1 implica (ii), poniendo R_j^β en lugar de $\mathcal{M}_\beta$. □

El teorema anterior nos proporciona la siguiente caracterización de pesos en A_∞^{loc} mediante transformadas de Riesz locales.

Teorema 2.4.23. *Sea $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ un peso. Entonces, cada una de las condiciones de (i) a (iv) del Teorema 2.2.1 son equivalentes a la condición (i) del Teorema 2.4.9.*

Observación 2.4.24. Por la Observación 2.4.6 y el Lema 2.4.2, el Teorema 2.4.9 también vale con $\widetilde{R}_j^\beta$ en lugar de R_j^β. Entonces, como en el Teorema 2.4.23, cada una de las condiciones de (i) a (iv) del Teorema 2.2.1 son equivalentes a que existe una constante $C > 0$ que verifica, para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$,

$$\int_{\widetilde{B}} \left|\widetilde{R}_j^\beta(w\chi_B)\right| dx \leq C \int_B w\; dx,$$

para cada $j = 1,\ldots,n$.

2.5. Condición $\mathcal{B}_p^{loc}$

Consideremos la siguiente clase de pesos.

Definición 2.5.1. *Sean $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ un peso, $0 < \beta < 1$ y $0 < p < \infty$. Denotaremos $w \in \mathcal{D}_p^\beta$, si existen $C > 0$ y $0 < \varepsilon < n + p$ tales que, para todos $B \in \mathcal{F}_\beta$ y $t > 1$, se tiene*

$$w(B) \leq Ct^{n+p-\varepsilon} w\left(t^{-1}B\right).$$

Probaremos que, a pesar de su aparente diferencia, se verifica $\mathcal{B}_p^\beta = \mathcal{D}_p^\beta$. En este punto, vale la pena mencionar que la clase $\mathcal{B}_p^\beta$ es una versión local de una clase de pesos ya estudiada en el contexto euclídeo (ver, por ejemplo, [MW76] y [HMW73]). Más aún, la identificación con la clase $\mathcal{D}_p^\beta$ que buscamos probar fue estudiada por [HSV97] en el contexto euclídeo, para clases de pesos no-locales. Los siguientes lemas son adaptaciones de resultados que aparecen en ese trabajo. Antes de introducirlos, damos una definición.

Definición 2.5.2. *Una función real φ definida en un intervalo I (podría ser $I = \mathbb{R}$) es casi-decreciente si existe una constante $C > 0$ tal que, para todos t_1 y t_2 en I, se tiene*

$$\varphi(t_2) \leq C\varphi(t_1),$$

siempre que $t_1 < t_2$.

Lema 2.5.3. *Sea φ una función definida en $(0, M]$, no-negativa, no-decreciente, y tal que existen constantes positivas c_1, c_2, y r, para las cuales*

$$\int_t^M \frac{\varphi(s)}{s^{r+1}} ds \leq c_1 \frac{\varphi(t)}{t^r}$$

y

$$\varphi(t) \leq c_2 \varphi\left(\frac{t}{2}\right),$$

para todo $t \in (0, M]$. Entonces, la función $t \mapsto \varphi(t)t^{-r}$ es casi-decreciente en $(0, M]$ con constante $2^{r+1}c_1c_2$.

Demostración. Sean t_1 y t_2 tales que $0 < t_1 < t_2 \leq M$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(t_2)}{t_2^r} &\leq c_2 2 \frac{t_2}{2} \frac{\varphi\left(\frac{t_2}{2}\right)}{t_2^{r+1}} \leq 2c_2 \int_{\frac{t_2}{2}}^{t_2} \frac{\varphi(s)}{s^{r+1}} ds \\
&\leq 2c_2 \int_{\frac{t_1}{2}}^{M} \frac{\varphi(s)}{s^{r+1}} ds \leq 2c_1c_2 \frac{\varphi\left(\frac{t_1}{2}\right)}{\left(\frac{t_1}{2}\right)^r} \\
&\leq 2^{r+1}c_1c_2 \frac{\varphi(t_1)}{t_1^r}.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.5.4. *Dada φ definida en $(0, M]$, no-negativa y no-decreciente, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Existen c_1, c_2, $r > 0$ tales que, para todo $t \in (0, M]$,

$$\int_t^M \frac{\varphi(s)}{s^{r+1}} ds \leq c_1 \frac{\varphi(t)}{t^r}$$

y

$$\varphi(t) \leq c_2 \varphi\left(\frac{t}{2}\right);$$

(ii) existen $a > 1$ y $r > 0$ tales que, para todo $t \in (0, M]$,

$$\varphi(t) \leq \frac{a^r}{2} \varphi\left(\frac{t}{a}\right);$$

(iii) existen $C > 0$, $r > 0$, y $\varepsilon \in (0, r)$ tales que, para todos $\lambda \geq 1$ y $t \in (0, M]$,

$$\varphi(t) \leq C\lambda^{r-\varepsilon} \varphi\left(\frac{t}{\lambda}\right).$$

Demostración. **(i)⇒(ii).** Sea $a = e^{2^{r+2}c_1^2c_2} > 1$. Supongamos que, para algún $t_0 \in (0, M]$, se tiene $\varphi(t_0) > \frac{a^r}{2}\varphi(\frac{t_0}{a})$. Entonces, por el Lema 2.5.3, para cada $s \in (0, t_0)$,

$$\frac{\varphi(t_0)}{t_0^r} \leq 2^{r+1}c_1c_2\frac{\varphi(s)}{s^r},$$

y luego

$$\begin{aligned}
c_1\frac{\varphi\left(\frac{t_0}{a}\right)}{\left(\frac{t_0}{a}\right)^r} &\geq \int_{\frac{t_0}{a}}^{M}\frac{\varphi(s)}{s^{r+1}}ds \geq \int_{\frac{t_0}{a}}^{t_0}\frac{\varphi(s)}{s^{r+1}}ds \\
&\geq \int_{\frac{t_0}{a}}^{t_0}(2^{r+1}c_1c_2)^{-1}\frac{\varphi(t_0)}{t_0^r s}ds = (2^{r+1}c_1c_2)^{-1}\frac{\varphi(t_0)}{t_0^r}\log a \\
&> (2^{r+1}c_1c_2)^{-1}\frac{\frac{a^r}{2}\varphi\left(\frac{t_0}{a}\right)}{t_0^r}2^{r+2}c_1^2c_2 = c_1\frac{\varphi\left(\frac{t_0}{a}\right)}{\left(\frac{t_0}{a}\right)^r},
\end{aligned}$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, (ii) debe satisfacerse.

(ii)⇒(iii). Sean $\lambda \geq 1$ y $k \in \mathbb{N}_0$ tales que $a^k \leq \lambda < a^{k+1}$. Aplicando $k+1$ veces la hipótesis dada, se obtiene

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &\leq \frac{a^r}{2}\varphi\left(\frac{t}{a}\right) \leq \left(\frac{a^r}{2}\right)^2\varphi\left(\frac{t}{a^2}\right) \leq \cdots \\
&\leq \left(\frac{a^r}{2}\right)^{k+1}\varphi\left(\frac{t}{a^{k+1}}\right) \leq \frac{a^r}{2^{k+1}}\lambda^r\varphi\left(\frac{t}{\lambda}\right),
\end{aligned}$$

para todo $t \in (0, M]$. Tomando $\varepsilon = \min\left(r/2, (\log_2 a)^{-1}\right)$ se tiene

$$\lambda < 2^{(k+1)\log_2 a} \leq \left(2^{k+1}\right)^{1/\varepsilon}$$

y luego

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &\leq \frac{a^r}{2^{k+1}}\lambda^r\varphi\left(\frac{t}{\lambda}\right) < \frac{a^r}{\lambda^\varepsilon}\lambda^r\varphi\left(\frac{t}{\lambda}\right) \\
&= C\lambda^{r-\varepsilon}\varphi\left(\frac{t}{\lambda}\right),
\end{aligned}$$

con $C = a^r$.

(iii)⇒(i). Sea $t \in (0, M]$. Para $\lambda = 2$ se tiene $\varphi(t) \leq C2^{r-\varepsilon}\varphi(\frac{1}{2}t)$. Además

$$\begin{aligned}
\int_t^M\frac{\varphi(s)}{s^{r+1}}ds &= \int_1^{\frac{M}{t}}\frac{\varphi(t\lambda)}{(t\lambda)^{r+1}}t\,d\lambda \leq \int_1^{\frac{M}{t}}\frac{C\lambda^{r-\varepsilon}\varphi(t)}{\lambda^{r+1}t^r}d\lambda \\
&\leq C\frac{\varphi(t)}{t^r}\int_1^\infty\lambda^{-1-\varepsilon}d\lambda = \frac{C}{\varepsilon}\frac{\varphi(t)}{t^r},
\end{aligned}$$

por lo que se establece (i). □

Observación 2.5.5. Las constantes involucradas en las desigualdades de los lemas anteriores no dependen de M. Así, en particular, se pueden extender a $(0,\infty)$, como en [HSV97].

Lema 2.5.6. *Para todos $p \in (0,\infty)$ y $\beta,\gamma \in (0,1)$ se verifica $\mathcal{D}_p^\beta = \mathcal{D}_p^\gamma$.*

Demostración. Supongamos $\gamma < \beta$. Como $\mathcal{F}_\gamma$ es una subfamilia de $\mathcal{F}_\beta$, es claro que $\mathcal{D}_p^\beta \subset \mathcal{D}_p^\gamma$. Por otra parte, si $w \in \mathcal{D}_p^\gamma$ entonces, w duplica sobre $\mathcal{F}_\gamma$ y luego, por la Proposición 1.0.3, también duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$. Si $B(x,r) \in \mathcal{F}_\beta$, se tiene $B\left(x, \frac{\gamma}{\beta} r\right) \in \mathcal{F}_\gamma$, por lo que, dadas las constantes C y ε de la definición de $\mathcal{D}_p^\gamma$, para cada $t > 1$, resulta

$$\begin{aligned} w(B(x,r)) &\le C_{\beta,\gamma} w\left(B\left(x, \frac{\gamma}{\beta} r\right)\right) \\ &\le C_{\beta,\gamma} C t^{n+p-\varepsilon} w\left(B\left(x, t^{-1}\frac{\gamma}{\beta} r\right)\right) \\ &\le C_{\beta,\gamma} C t^{n+p-\varepsilon} w\left(B\left(x, t^{-1} r\right)\right), \end{aligned}$$

donde la constante $C_{\beta,\gamma}$ aparece por duplicación. Así, $w \in \mathcal{D}_p^\beta$, completando la demostración. □

Teorema 2.5.7. *Dados $\beta \in (0,1)$ y $p \in (0,\infty)$, se verifica $\mathcal{B}_p^\beta \subset \mathcal{D}_p^\beta$.*

Demostración. Veamos primero que, en un contexto general (X,d,μ), si $w \in \mathcal{B}_p^\beta$ entonces w duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$. Por la Definición 2.1.4, existe $C > 0$ tal que, si $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_\beta$, tenemos

$$\begin{aligned} w(B) &= w\left(B - \frac{1}{2}B\right) + w\left(\frac{1}{2}B\right) \\ &\le \int_{B-\frac{1}{2}B} \frac{\mu(B)\, r^p w(x) d\mu(x)}{\mu(B(\xi, d(\xi,x)))\, d(\xi,x)^p} \\ &\quad + w\left(\frac{1}{2}B\right) \\ &\le 2^p C_\beta \int_{S_\beta\left(\frac{1}{2}B\right)-\frac{1}{2}B} \frac{\mu\left(\frac{1}{2}B\right)\left(\frac{r}{2}\right)^p w(x) d\mu(x)}{\mu(B(\xi, d(\xi,x)))\, d(\xi,x)^p} \\ &\quad + w\left(\frac{1}{2}B\right) \\ &\le (2^p C_\beta C + 1)\, w\left(\frac{1}{2}B\right), \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

donde C_β aparece por la duplicación de μ sobre $\mathcal{F}_\beta$.

Ahora, volviendo al contexto euclídeo, veamos que existe $C > 0$ tal que, para toda $B \in \mathcal{F}_{\frac{2}{5}\beta}$,

$$w(B) \le C w\left(B - \frac{1}{2}B\right).$$

Sean $B = B(x,r)$ e y tal que $|x-y| = \frac{3}{4}r$. Entonces, $B\left(y, \frac{1}{4}r\right) \subset \overline{B - \frac{1}{2}B}$ y $B \subset B\left(y, \frac{7}{4}r\right)$. Ahora, suponiendo $B \in \mathcal{F}_{\beta'}$, con $\beta' = \frac{2}{5}\beta$, veamos que existe $\gamma < 1$ para el cual $B\left(y, \frac{7}{4}r\right) \in \mathcal{F}_\gamma$. Como $|x-y| \leq \frac{3}{4}\beta'\rho(x)$, por el Lema 2.2.7 tenemos

$$r \leq \beta'\rho(x) \leq \frac{\beta'}{1-\frac{3}{4}\beta'}\rho(y),$$

donde

$$\frac{7}{4}\left(\frac{\beta'}{1-\frac{3}{4}\beta'}\right) < \frac{14}{20-6} = 1.$$

Entonces, $B\left(y, \frac{7}{4}r\right) \in \mathcal{F}_\gamma$, con $\gamma = \frac{7\beta'}{4-3\beta'} < 1$. Luego, dado que, por (2.5.8), w duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$ y, por la Proposición 1.0.3, también duplica sobre $\mathcal{F}_\gamma$, se obtiene

$$w(B) \leq w\left(B\left(y, \frac{7}{4}r\right)\right) \leq C_\gamma w\left(B\left(y, \frac{1}{4}r\right)\right) \leq C_\gamma w\left(B - \frac{1}{2}B\right). \tag{2.5.9}$$

Probaremos ahora que $w \in \mathcal{D}_p^{\beta'/2}$, de donde, por el lema anterior, se sigue $w \in \mathcal{D}_p^\beta$. Sean $B = B(x,r) \in \mathcal{F}_{\beta'/2}$ y $m \in \mathbb{N}$ para el cual $\frac{\beta'\rho(x)}{2^{m+1}} < r \leq \frac{\beta'\rho(x)}{2^m}$. Entonces, por (2.5.9) se tiene

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{\beta'\rho(x)}{2^{m+1}}}^{\frac{\beta'\rho(x)}{2}} \frac{w(B(x,2s))}{s^{n+p+1}}ds \\
= \;& \sum_{k=1}^{m} \int_{\frac{\beta'\rho(x)}{2^{k+1}}}^{\frac{\beta'\rho(x)}{2^k}} \frac{w(B(x,2s))}{s^{n+p+1}}ds \\
\leq \;& \log 2 \sum_{k=1}^{m} \frac{w\left(B\left(x, \frac{\beta'\rho(x)}{2^{k-1}}\right)\right)}{\left(\frac{\beta'\rho(x)}{2^{k+1}}\right)^{n+p}} \\
\leq \;& C\log 2 \sum_{k=1}^{m} \frac{w\left(B\left(x, \frac{\beta'\rho(x)}{2^{k-1}}\right) - B\left(x, \frac{\beta'\rho(x)}{2^{k}}\right)\right)}{\left(\frac{\beta'\rho(x)}{2^{k+1}}\right)^{n+p}} \\
\leq \;& C4^{n+p}\log 2 \sum_{k=1}^{m} \int_{B\left(x, \frac{\beta'\rho(x)}{2^{k-1}}\right) - B\left(x, \frac{\beta'\rho(x)}{2^{k}}\right)} \frac{w(y)}{|y-x|^{n+p}}dy \\
\leq \;& C4^{n+p}\log 2 \int_{B(x,\beta'\rho(x)) - B\left(x, \frac{\beta'\rho(x)}{2^m}\right)} \frac{w(y)}{|y-x|^{n+p}}dy \\
\leq \;& C4^{n+p}\log 2 \int_{\mathcal{S}_\beta(B)-B} \frac{w(y)}{|y-x|^{n+p}}dy \leq C_{p,n,\beta}\frac{w(B)}{r^{n+p}},
\end{aligned}$$

donde las últimas dos desigualdades se deben a que $B \subset B\left(x, \frac{\beta'\rho(x)}{2^m}\right)$ y a la Definición 2.1.4, respectivamente. Por lo tanto, tenemos que

$$\int_r^{\frac{\beta'\rho(x)}{2}} \frac{w(B(x,s))}{s^{n+p+1}}ds \leq C_{p,n,\beta}\frac{w(B(x,r))}{r^{n+p}}, \tag{2.5.10}$$

para todos $x \in \Omega$ y $r \in \left(0, \frac{\beta' \rho(x)}{2}\right]$, donde la constante es independiente de r y x. Además, como w duplica sobre $\mathcal{F}_{\beta'/2}$, hay una constante $C'_{p,n,\beta}$ tal que

$$w\left(B\left(x,r\right)\right) \leq C'_{p,n,\beta} w\left(B\left(x, \frac{r}{2}\right)\right), \tag{2.5.11}$$

para todos $x \in \Omega$ y $r \in \left(0, \frac{\beta' \rho(x)}{2}\right]$. De este modo, por (2.5.10) y (2.5.11), aplicando el Lema 2.5.4 con $\varphi(t) = w(B(x,t))$ y $r = n+p$, se deduce que existen $C > 0$ y $\varepsilon \in (0, n+p)$ tales que, para todos $\lambda \geq 1$ y $t \in \left(0, \frac{\beta' \rho(x)}{2}\right]$,

$$w(B(x,t)) \leq C\lambda^{n+p-\varepsilon} w\left(B\left(x, \frac{t}{\lambda}\right)\right), \tag{2.5.12}$$

donde, observando la demostración del Lema 2.5.4, vemos que C y ε dependen solo de n, p, $C_{p,n,\beta}$ y $C'_{p,n,\beta}$. Finalmente, (2.5.12) dice que $w \in \mathcal{D}_p^{\beta'/2}$. □

Para establecer el recíproco del teorema anterior, necesitamos algunos lemas.

Lema 2.5.13. *Sea $\sigma \in (0,1)$. Entonces, para cada $\theta \in \left(0, \text{mín}\left\{\frac{1}{5}, \frac{1-\sigma}{\sigma^2+\sigma}\right\}\right)$, existe $\delta \in (0, 1-\sigma)$ tal que, si $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_{\theta\sigma}$,*

$$\mathcal{S}_\sigma(B) \subset B(\xi, (\sigma+\delta)\rho(\xi)).$$

Demostración. Tomamos $0 < \theta < \text{mín}\left\{\frac{1}{5}, \frac{1-\sigma}{\sigma^2+\sigma}\right\}$ y $r \leq \theta\sigma\rho(\xi)$. Si $x \in B$ y $z \in B(x, \sigma\rho(x))$, por el Lema 2.2.7 se tiene

$$\begin{aligned} |z-\xi| &< \sigma\rho(x) + \theta\sigma\rho(\xi) \\ &\leq \sigma(1+\theta\sigma)\rho(\xi) + \theta\sigma\rho(\xi) \\ &= \left(\sigma + \theta\sigma^2 + \theta\sigma\right)\rho\left(\xi\right). \end{aligned}$$

Así, si $\delta = \theta\sigma^2 + \theta\sigma$, se obtiene $z \in B(\xi, (\sigma+\delta)\rho(\xi))$ con $\sigma + \delta < 1$. Luego, $B\left(x, \sigma\rho(x)\right) \subset B(\xi, (\sigma+\delta)\rho(\xi))$, para cada $x \in B$, y entonces

$$\mathcal{S}_\sigma\left(B\right) = \bigcup_{x \in B} B\left(x, \sigma\rho(x)\right) \subset B(\xi, (\sigma+\delta)\rho(\xi)).$$

□

Observación 2.5.14. En el lema anterior, si σ es próximo a 0, $\frac{1-\sigma}{\sigma^2+\sigma}$ puede ser arbitrariamente grande. Como queremos que $\theta\sigma$ sea una fracción de σ, pedimos $\theta < 1/5$.

Observación 2.5.15. El lema anterior es también cierto para espacios métricos más generales.

Lema 2.5.16. *Para todos $p \in (0, \infty)$ y $\beta, \sigma \in (0,1)$ se verifica $\mathcal{B}_p^\beta = \mathcal{B}_p^\sigma$.*

Demostración. Sea $w \in \mathcal{B}_p^\beta$. Si $\sigma < \beta$ es trivial que $w \in \mathcal{B}_p^\sigma$, por ser $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\beta$ y $\mathcal{S}_\sigma(B) \subset \mathcal{S}_\beta(B)$. Supongamos entonces $\beta < \sigma$ y consideremos $\theta, \delta \in (0,1)$ como en el lema anterior con $\theta < \beta/\sigma$. Si $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_{\theta\sigma} \subset \mathcal{F}_\beta$ se tiene,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}_\sigma(B)-B} \frac{|B|r^p w(y)}{|y-\xi|^{n+p}}dy \quad &\leq \int_{B(\xi,(\sigma+\delta)\rho(\xi))-B(\xi,\theta\sigma\rho(\xi))} \frac{|B|r^p w(y)}{|y-\xi|^{n+p}}dy \\ &+ \int_{B(\xi,\theta\sigma\rho(\xi))-B} \frac{|B|r^p w(y)}{|y-\xi|^{n+p}}dy. \end{aligned} \tag{2.5.17}$$

Para estimar la primera integral en (2.5.17), tomemos $\gamma \in (\sigma+\delta, 1)$. Ya que, por Teorema 2.5.7 y Lema 2.5.6, $\mathcal{B}_p^\beta \subset \mathcal{D}_p^\beta = \mathcal{D}_p^\gamma$, existen C_γ y ε, independientes de ξ y r, tales que

$$w\left(B(\xi,(\sigma+\delta)\rho(\xi))\right) \leq C_\gamma t^{n+p-\varepsilon} w\left(B\left(\xi, \frac{(\sigma+\delta)\rho(\xi)}{t}\right)\right)$$

con $t = \frac{(\sigma+\delta)\rho(\xi)}{r}$, que es mayor a 1. Llevando esto al primer término de la suma de (2.5.17), se obtiene

$$\begin{aligned} &\int_{B(\xi,(\sigma+\delta)\rho(\xi))-B(\xi,\theta\sigma\rho(\xi))} \frac{|B|r^p w(y)}{|y-\xi|^{n+p}}dy \\ \leq\ & C_n \left(\frac{r}{\theta\sigma\rho(\xi)}\right)^{n+p} w\left(B(\xi,(\sigma+\delta)\rho(\xi))\right) \\ \leq\ & C_n C_\gamma \left(\frac{r}{\theta\sigma\rho(\xi)}\right)^{n+p} \left(\frac{(\sigma+\delta)\rho(\xi)}{r}\right)^{n+p-\varepsilon} w(B) \\ =\ & C_n C_\gamma \left(\frac{\sigma+\delta}{\theta\sigma}\right)^{n+p} \left(\frac{r}{(\sigma+\delta)\rho(\xi)}\right)^{\varepsilon} w(B), \end{aligned}$$

por lo que

$$\int_{B(\xi,(\sigma+\delta)\rho(\xi))-B(\xi,\theta\sigma\rho(\xi))} \frac{|B|r^p w(y)}{|y-\xi|^{n+p}}dy < C\int_B w(y)dy. \tag{2.5.18}$$

Por otro lado, para la segunda integral en (2.5.17), ya que $w \in \mathcal{B}_p^\beta$, resulta

$$\begin{aligned}\int_{B(\xi,\theta\sigma\rho(\xi))-B} \frac{|B|r^p w(y)}{|y-\xi|^{n+p}}dy \quad &\leq \int_{\mathcal{S}_\beta(B)-B} \frac{|B|r^p w(y)}{|y-\xi|^{n+p}}dy \\ &\leq C_{w,\beta,p}\int_B w(y)dy. \end{aligned} \tag{2.5.19}$$

Por lo tanto, llevando (2.5.18) y (2.5.19) a (2.5.17), se deduce que

$$\frac{|B|r^p}{w(B)}\int_{\mathcal{S}_\sigma(B)-B} \frac{w(y)}{|y-\xi|^{n+p}}dy \leq C, \tag{2.5.20}$$

para toda $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_{\theta\sigma}$, donde C no depende de B. Sea ahora $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_\sigma - \mathcal{F}_{\theta\sigma}$, o sea, $\theta\sigma\rho(\xi) < r \leq \sigma\rho(\xi)$. Como w duplica sobre $\mathcal{F}_\sigma$, se tiene

$$w(\mathcal{N}_\sigma(B)) \quad \leq \quad w\left(\mathcal{N}_\sigma(B(\xi,\sigma\rho(\xi)))\right)$$

$$\begin{aligned} &\leq C_{w,\sigma} w\left(B\left(\xi, \sigma\rho\left(\xi\right)\right)\right) \\ &\leq C_{w,\sigma,\theta} w\left(B\left(\xi, \theta\sigma\rho\left(\xi\right)\right)\right) \\ &\leq C_{w,\sigma,\theta} w(B). \end{aligned}$$

Entonces, ya que $\mathcal{S}_\sigma\left(B\right) \subset \mathcal{N}_\sigma\left(B\right)$, de lo anterior se deduce

$$\frac{|B|r^p}{w\left(B\right)} \int_{\mathcal{S}_\sigma(B)-B} \frac{w(y)}{|y-\xi|^{n+p}} dy \leq \frac{|B|r^p}{w\left(B\right) r^{n+p}} w\left(\mathcal{N}_\sigma(B)\right) \leq C', \tag{2.5.21}$$

donde C' no depende de B. Por lo tanto, (2.5.20) y (2.5.21) implican que $w \in \mathcal{B}_p^\sigma$. □

Teorema 2.5.22. *Dados $\beta \in (0,1)$ y $p \in (0,\infty)$, se verifica $\mathcal{D}_p^\beta \subset \mathcal{B}_p^\beta$.*

Demostración. Sea $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_\gamma$ tal que $5B \notin \mathcal{F}_\gamma$. Si $x \in \mathcal{N}_\gamma(B)$, existen x' y x'' tales que $x \in B\left(x', \gamma\rho\left(x'\right)\right)$ y $x'' \in B\left(x', \gamma\rho\left(x'\right)\right) \cap B$. Ahora, como se vio en la Observación 1.0.7, hay un $m \in \mathbb{N}$ (que depende solo de γ) tal que $\rho\left(x'\right) < 2^{m+2}\rho\left(\xi\right)$, y entonces

$$\begin{aligned} |x-\xi| &\leq |x-x''| + |x''-\xi| < 2\gamma\rho\left(x'\right) + r \\ &< 2^{m+3}\gamma\rho\left(\xi\right) + r < \left(2^{m+3}5+1\right) r. \end{aligned}$$

Así, tenemos

$$|x-\xi| < (2^{m+3}5+1)r, \tag{2.5.23}$$

para cada $x \in \mathcal{N}_\gamma(B)$, donde m es el entero que verifica $2^{m-1} < \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \leq 2^m$ (ver páginas 615 y 616 en [HSV14]). Notemos que

$$2^{m+3}5+1 = 2^{m-1}80+1 < \frac{1+\gamma}{1-\gamma}80+1 = c_\gamma,$$

por lo cual $\lim\limits_{\gamma\to 0^+} \gamma c_\gamma = 0$. Ahora, fijado $\beta \in (0,1)$, tomamos $\gamma > 0$ tan pequeño de modo que $\gamma c_\gamma < \beta$. Así tenemos $c_\gamma B \in \mathcal{F}_\beta$, para cada $B \in \mathcal{F}_\gamma$, y además, por (2.5.23),

$$\mathcal{N}_\gamma(B) \subset c_\gamma B, \tag{2.5.24}$$

para cada $B \in \mathcal{F}_\gamma - \mathcal{F}_{\gamma/5}$. Sea $w \in \mathcal{D}_p^\beta$. Notemos que, si $B = B\left(\xi, r\right) \in \mathcal{F}_\gamma - \mathcal{F}_{\gamma/5}$ tenemos, por (2.5.24),

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}_\gamma(B)-B} \frac{|B|r^p w(x)}{|x-\xi|^{n+p}} dx &\leq |B|r^p r^{-n-p} \int_{c_\gamma B - B} w\ dx \\ &\leq C_n w(c_\gamma B) \leq C_{n,p,\beta,w} c_\gamma^{n+p-\varepsilon} w(B). \end{aligned} \tag{2.5.25}$$

Si ahora suponemos $B \in \mathcal{F}_{\gamma/5}$, tomando $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $5^{k_0}B \in \mathcal{F}_\gamma - \mathcal{F}_{\gamma/5}$, resulta

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{S}_\gamma(B)-B} \frac{|B|r^p w(x)}{|x-\xi|^{n+p}} dx \\ &= \int_{\mathcal{S}_\gamma(B)-5^{k_0}B} \frac{|B|r^p w(x)}{|x-\xi|^{n+p}} dx + \int_{5^{k_0}B-B} \frac{|B|r^p w(x)}{|x-\xi|^{n+p}} dx. \end{aligned} \tag{2.5.26}$$

Por un lado, ya que $w \in \mathcal{D}_p^\beta$, la integral del segundo término en (2.5.26) se estima como

$$\begin{aligned}
\int_{5^{k_0}B-B} \frac{|B|r^p w(x)}{|x-\xi|^{n+p}}dx &= |B|r^p \sum_{k=0}^{k_0-1} \int_{5^{k+1}B-5^kB} \frac{w(x)}{|x-\xi|^{n+p}}dx \\
&\leq |B|r^p \sum_{k=0}^{k_0-1} (5^k r)^{-n-p} \int_{5^{k+1}B} w\, dx \\
&\leq C_{n,p,\beta,w} \sum_{k=0}^{k_0-1} (5^k)^{-n-p} (5^{k+1})^{n+p-\varepsilon} w\,(B) \\
&< C_{n,p,\beta,w} \sum_{k=0}^{\infty} (5^k)^{-\varepsilon} w(B) = Cw\,(B)\,, \qquad (2.5.27)
\end{aligned}$$

donde C no depende de B. Por otro lado, por ser $5^{k_0}B \in \mathcal{F}_\gamma - \mathcal{F}_{\gamma/5}$, podemos aplicar (2.5.25) a la integral del primer término en (2.5.26), obteniendo así

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{S}_\gamma(B)-5^{k_0}B} \frac{|B|r^p w(x)}{|x-\xi|^{n+p}}dx \\
\leq\ & \int_{\mathcal{S}_\gamma(5^{k_0}B)-5^{k_0}B} \frac{|B|r^p w(x)}{|x-\xi|^{n+p}}dx \\
=\ & \frac{|B|r^p}{|5^{k_0}B|\,(5^{k_0}r)^p} \int_{\mathcal{S}_\gamma(5^{k_0}B)-5^{k_0}B} \frac{|5^{k_0}B|\left(5^{k_0}r\right)^p w(x)}{|x-\xi|^{n+p}}dx \\
\leq\ & \frac{C}{(5^{k_0})^{n+p}} w\left(5^{k_0}B\right) \leq C\left(5^{k_0}\right)^{-\varepsilon} w\,(B) < Cw\,(B)\,. \qquad (2.5.28)
\end{aligned}$$

Luego, llevando (2.5.27) y (2.5.28) a (2.5.26), se tiene

$$\int_{\mathcal{S}_\gamma(B)-B} \frac{|B|r^p w(x)}{|x-\xi|^{n+p}}dx \leq Cw\,(B)\,, \qquad (2.5.29)$$

para toda $B \in \mathcal{F}_{\gamma/5}$. Por lo tanto, de (2.5.25) y (2.5.29) se deduce que $w \in \mathcal{B}_p^\gamma = \mathcal{B}_p^\beta$, por el Lema 2.5.16. $\square$

2.6. Demostración del Teorema 2.1.9

Antes de empezar con la demostración del Teorema 2.1.9 será conveniente obtener algunos resultados que proporcionarán más información sobre las clases de pesos $\mathcal{B}_p^\beta$ y $\widetilde{\mathcal{B}}_p^\beta$. Para ello volvemos a considerar un contexto métrico más general, como al principio de este capítulo.

Lema 2.6.1. *Dado $\beta \in (0,1)$, si $B \in \mathcal{F}_{\beta/3}$ entonces $B \subset \mathcal{E}_\beta\,(B)$.*

Demostración. Sea ξ el centro de B. Si x e y están en B, por el Lema 2.2.7 se consigue

$$d\left(y,x\right) < \frac{2\beta}{3}\rho\left(\xi\right) \leq \frac{2\beta}{3-\beta}\rho\left(x\right) < \beta\rho\left(x\right)$$

ya que $2 < 3-\beta$. De este modo, $B \subset B\left(x, \beta\rho\left(x\right)\right)$, para cada $x \in B$. □

Lema 2.6.2. *Dado $\beta \in (0,1)$, sea $0 < \alpha < \beta/3$. Si w es un peso para el cual existe $C > 0$ tal que, para toda $B = B\left(\xi, r\right) \in \mathcal{F}_\alpha$, se tiene*

$$\int_{\mathcal{E}_\beta(B)-B} \frac{\mu\left(B\right) r^p w(x) d\mu\left(x\right)}{\mu\left(B\left(\xi, d\left(\xi,x\right)\right)\right) d\left(\xi,x\right)^p} \leq Cw(B) \tag{2.6.3}$$

entonces $w \in \widetilde{\mathcal{B}}_p^\beta$.

Demostración. Veamos primero que w es duplicante sobre $\mathcal{F}_{2\alpha}$ (por lo que también lo es sobre $\mathcal{F}_\beta$). Razonando de manera similar a (2.5.8), pero aplicando esta vez el Lema 2.6.1), si $B = B\left(\xi, r\right) \in \mathcal{F}_{2\alpha}$, tenemos

$$\begin{aligned} w\left(B\right) &\leq \int_{B-\frac{1}{2}B} \frac{\mu\left(B\right) r^p w(x) d\mu\left(x\right)}{\mu\left(B\left(\xi, d\left(\xi,x\right)\right)\right) d\left(\xi,x\right)^p} \\ &\quad + w\left(\frac{1}{2}B\right) \\ &\leq 2^p C_\beta \int_{\mathcal{E}_\beta\left(\frac{1}{2}B\right)-\frac{1}{2}B} \frac{\mu\left(\frac{1}{2}B\right)\left(\frac{r}{2}\right)^p w(x) d\mu\left(x\right)}{\mu\left(B\left(\xi, d\left(\xi,x\right)\right)\right) d\left(\xi,x\right)^p} \\ &\quad + w\left(\frac{1}{2}B\right) \\ &\leq \left(2^p C_\beta C + 1\right) w\left(\frac{1}{2}B\right), \end{aligned}$$

donde C_β aparece por la duplicación de μ sobre $\mathcal{F}_\beta$, y además se consideró que $\mathcal{E}_\beta\left(B\right) \subset \mathcal{E}_\beta\left(\frac{1}{2}B\right)$. Ahora, solo se debe probar que se tiene también (2.6.3) con $B = B\left(\xi, r\right) \in \mathcal{F}_{\beta/3} - \mathcal{F}_\alpha$. De hecho, si $C_{w,\beta,\alpha}$ es una constante de duplicación de w tomada sobre dilataciones en un factor de β/α de bolas de la familia $\mathcal{F}_\alpha$, se consigue

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}_\beta(B)-B} \frac{\mu\left(B\right) r^p w(x) d\mu\left(x\right)}{\mu\left(B\left(\xi, d\left(\xi,x\right)\right)\right) d\left(\xi,x\right)^p} &\leq w\left(\mathcal{E}_\beta\left(B\right)\right) \\ &\leq w\left(B\left(\xi, \beta\rho\left(\xi\right)\right)\right) \\ &\leq C_{w,\beta,\alpha} w\left(B\left(\xi, \alpha\rho\left(\xi\right)\right)\right) \\ &\leq C_{w,\beta,\alpha} w(B), \end{aligned}$$

con lo que probamos el lema. □

Lema 2.6.4. *Dados $p \in (0,\infty)$ y $\beta \in (0,1)$, $\mathcal{B}_p^\beta = \widetilde{\mathcal{B}}_p^\beta$.*

Demostración. Sean $p \in (0,\infty)$ y $\beta \in (0,1)$. Ya que, $\mathcal{E}_\beta(B) \subset \mathcal{S}_\beta(B)$, para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$, es trivial que $\mathcal{B}_p^\beta \subset \widetilde{\mathcal{B}}_p^\beta$. Luego, por el Lema 2.5.16, basta ver que $\widetilde{\mathcal{B}}_p^\beta \subset \mathcal{B}_p^\gamma$, para algún $\gamma \in (0,\beta)$. Tomamos $\sigma = \frac{9\beta}{11+2\beta}$ y $B \in \mathcal{F}_{\sigma/10}$ con centro ξ. Para cada $x \in B$, si $y \in B$, por el Lema 2.2.7 se tiene

$$d(x,y) < \frac{2\sigma}{10}\rho(\xi) \le \frac{2\sigma}{10-\sigma}\rho(x) < \frac{2\sigma}{9}\rho(x).$$

Luego, por un lado, dado $z \notin \Omega$, resulta

$$\rho(x) \le d(x,y) + d(y,z) < \frac{2\sigma}{9}\rho(x) + d(y,z),$$

de lo cual sigue que

$$\left(1 - \frac{2\sigma}{9}\right)\rho(x) \le \rho(y).$$

Por otro lado, si $x' \in B(x,\sigma\rho(x))$, tenemos

$$\begin{aligned} d(x',y) &< \sigma\rho(x) + d(x,y) < \frac{11\sigma}{9}\rho(x) \\ &\le \frac{11\sigma}{9-2\sigma}\rho(y) = \beta\rho(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtuvimos que

$$B(x,\sigma\rho(x)) \subset B(y,\beta\rho(y)),$$

para todos $x, y \in B$. De esto se deduce que

$$\mathcal{S}_\sigma(B) \subset \mathcal{E}_\beta(B). \tag{2.6.5}$$

Luego, dados $w \in \widetilde{\mathcal{B}}_p^\beta$ y $B = B(\xi,r) \in \mathcal{F}_{\sigma/10}$, se tiene por (2.6.5)

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{S}_{\sigma/10}(B)-B} \frac{\mu(B)\, r^p w(x) d\mu(x)}{\mu(B(\xi,d(\xi,x)))\, d(\xi,x)^p} \\ \le &\int_{\mathcal{E}_\beta(B)-B} \frac{\mu(B)\, r^p w(x) d\mu(x)}{\mu(B(\xi,d(\xi,x)))\, d(\xi,x)^p} \le Cw(B), \end{aligned}$$

por lo cual $w \in \mathcal{B}_p^{\sigma/10} = \mathcal{B}_p^\beta$. □

Ahora podemos volver al contexto euclídeo y pasar a la demostración del teorema principal de esta sección. Primero, analizaremos cierta estructura geométrica que se presenta en $\mathbb{R}^n$ con cubos de lados paralelos a los ejes coordenados, y que será útil para probar que $w \in \mathcal{B}_1^\beta$ bajo las hipótesis dadas para las transformadas de Riesz locales. La siguiente construcción se sugiere en la demostración del Teorema 2 en [Fuj77] (página 533). En lo que sigue, como es usual, si $x \in \mathbb{R}^n$ denotamos $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Proposición 2.6.6. *Para cada cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes coordenados, $\mathbb{R}^n$ puede particionarse en una familia finita de conjuntos con interiores disjuntos tales que, si J es uno de estos conjuntos, existen cubos Q_1 y Q_2 verificando*

$$Q_1 \cup Q_2 \subset \frac{2}{13}Q, \tag{2.6.7}$$

$$|Q_1| = |Q_2| = \left(\frac{l}{104}\right)^n, \tag{2.6.8}$$

y

$$\sup_{x \in Q_1} |z - x| \leq \operatorname{ínf}_{y \in Q_2} |z - y|, \tag{2.6.9}$$

para todo $z \in J - Q$, siendo l el lado de Q. Además, hay un entero k entre 1 y n tal que, si $x \in Q_1$, $y \in Q_2$ y $z \in J - Q$, se verifican

$$x_k \leq \operatorname{mín}\{y_k, z_k\} \tag{2.6.10}$$

o

$$\operatorname{máx}\{y_k, z_k\} \leq x_k,$$

y

$$|y_k - x_k| \geq \frac{l}{52}. \tag{2.6.11}$$

Demostración. Consideramos $n = 2$ y dividimos $\mathbb{R}^2$ en subconjuntos de la forma

$$J_{i,j}^{k,l} = \left\{(x_1, x_2) : 0 \leq (-1)^k x_i \leq (-1)^l x_j\right\}$$

con i, j, k y l valiendo 1 o 2, y $i \neq j$.

Para fijar ideas, tomamos la región

$$J_{1,2}^{2,2} = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq x_2\} \tag{2.6.12}$$

y sea Q un cubo con lados paralelos a los ejes coordenados de centro 0 y lado l. Tomamos $\frac{1}{13}Q$, o sea, el cubo con lados paralelos a los ejes coordenados de centro 0 y lado $l' = \frac{l}{13}$, y dentro de éste, los cubos

$$Q_1 = \left[-\frac{l'}{4}, -\frac{l'}{8}\right] \times \left[\frac{3l'}{8}, \frac{l'}{2}\right]$$

y

$$Q_2 = \left[\frac{l'}{8}, \frac{l'}{4}\right] \times \left[-\frac{l'}{2}, -\frac{3l'}{8}\right],$$

y los vértices

$$V_1 = \left(-\frac{l'}{4}, \frac{3l'}{8}\right) \in Q_1$$

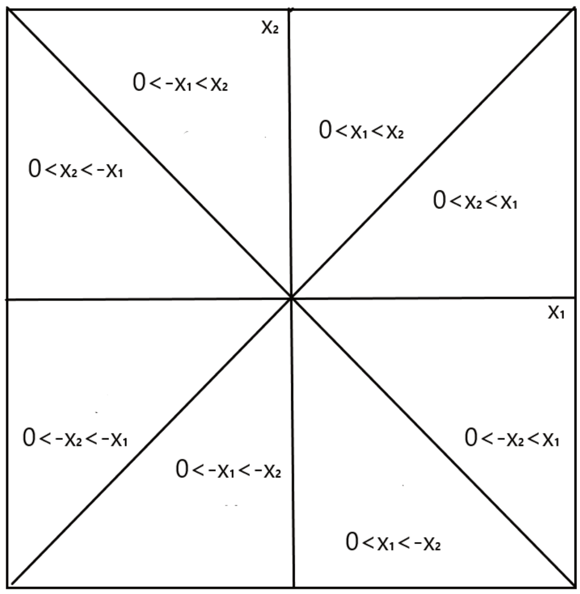

Figura 2.1: Las regiones interiores de los conjuntos $J_{i,j}^{k,l}$.

y

$$V_2 = \left(\frac{l'}{4}, -\frac{3l'}{8}\right) \in Q_2.$$

Sea $P(t)$, $t \geq 0$, la parametrización estándar de los puntos de la semirrecta que tiene origen en V_1 y dirección $V_2 - V_1$, o sea

$$\begin{aligned} P(t) &= V_1 + t(V_2 - V_1) \\ &= \left(-\frac{l'}{4} + t\frac{l'}{2}, \frac{3l'}{8} - t\frac{3l'}{4}\right) \end{aligned}$$

con $t \geq 0$. Queremos ver que si $z \in J_{1,2}^{2,2} - Q$, $h(t) = |z - P(t)|^2$ es creciente cuando t varía en $[0, \infty)$. Poniendo $z = (z_1, z_2)$ obtenemos

$$h(t) = \left(z_1 + \frac{l'}{4} - t\frac{l'}{2}\right)^2 + \left(z_2 - \frac{3l'}{8} + t\frac{3l'}{4}\right)^2$$

y luego

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2\left(z_1 + \frac{l'}{4} - t\frac{l'}{2}\right)\left(-\frac{l'}{2}\right) + 2\left(z_2 - \frac{3l'}{8} + t\frac{3l'}{4}\right)\frac{3l'}{4} \\ &= l'\left(\frac{3}{2}z_2 - \frac{9l'}{16} + t\frac{9l'}{8} - z_1 - \frac{l'}{4} + t\frac{l'}{2}\right) \\ &\geq l'\left(\frac{3}{2}z_2 - z_1 - \frac{13l'}{16}\right). \end{aligned}$$

Ahora, como $z \notin Q$, si $0 \leq z_1 \leq \frac{l}{2}$, deberá ser $z_2 > \frac{l}{2}$. Por el contrario, si $z_1 > \frac{l}{2}$, por ser

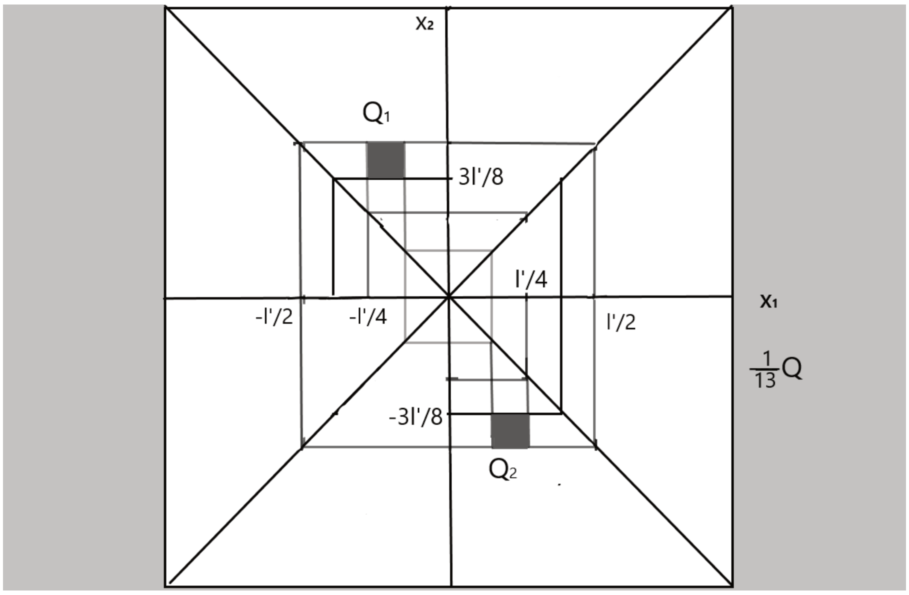

Figura 2.2: Los cubos $\frac{1}{13}Q$, Q_1 y Q_2.

$z \in J_{1,2}^{2,2}$, se tendrá $z_2 \geq z_1 > \frac{l}{2}$. Entonces, obtenemos arriba

$$\begin{aligned} h'(t) &\geq l'\left(\frac{1}{2}z_2 + z_2 - z_1 - \frac{l}{16}\right) \\ &\geq l'\left(\frac{1}{2}z_2 - \frac{l}{16}\right) > l'\left(\frac{l}{4} - \frac{l}{16}\right) \\ &= l'\frac{3l}{16} > 0. \end{aligned}$$

De este modo, como queriamos probar, $|z - P(t)|^2$ es creciente cuando $t \in [0, \infty)$. Esto dice que, en particular, si P es cualquier punto sobre la semirrecta con origen en V_1 y que pasa por V_2, se tiene

$$|z - V_1| \leq |z - P|,$$

para todo $z \in J_{1,2}^{2,2} - Q$. Sea $y \in Q_2$. Como Q_2 está contenido en la clausura del semiplano inferior a la recta que pasa por V_1 y V_2, si P_y es el punto de intersección entre esta recta y el segmento que une y y z, por lo anterior se deduce

$$|z - V_1| \leq |z - P_y| \leq |z - y|. \tag{2.6.13}$$

Por otro lado, si $x = (x_1, x_2) \in Q_1$, tenemos

$$-\frac{l'}{4} \leq x_1 \leq -\frac{l'}{8}$$

y

$$\frac{3l'}{8} \leq x_2 \leq \frac{l'}{2},$$

o sea

$$0 < z_1 + \frac{l'}{8} \leq z_1 - x_1 \leq z_1 + \frac{l'}{4}$$

y

$$0 < z_2 - \frac{l'}{2} \leq z_2 - x_2 \leq z_2 - \frac{3l'}{8},$$

ya que $z_1 \geq 0$ y $z_2 > \frac{l}{2}$. Entonces

$$|z - x| \leq |z - V_1|, \tag{2.6.14}$$

para todo $x \in Q_1$. Luego, (2.6.14) y (2.6.13), implican

$$\sup_{x \in Q_1} |z - x| \leq \inf_{y \in Q_2} |z - y|.$$

Notemos también que, para cada $(x_1, x_2) \in Q_1$, $(y_1, y_2) \in Q_2$ y $(z_1, z_2) \in J_{1,2}^{2,2}$, tenemos $x_1 \leq \min\{y_1, z_1\}$ (ver figura 2.3).

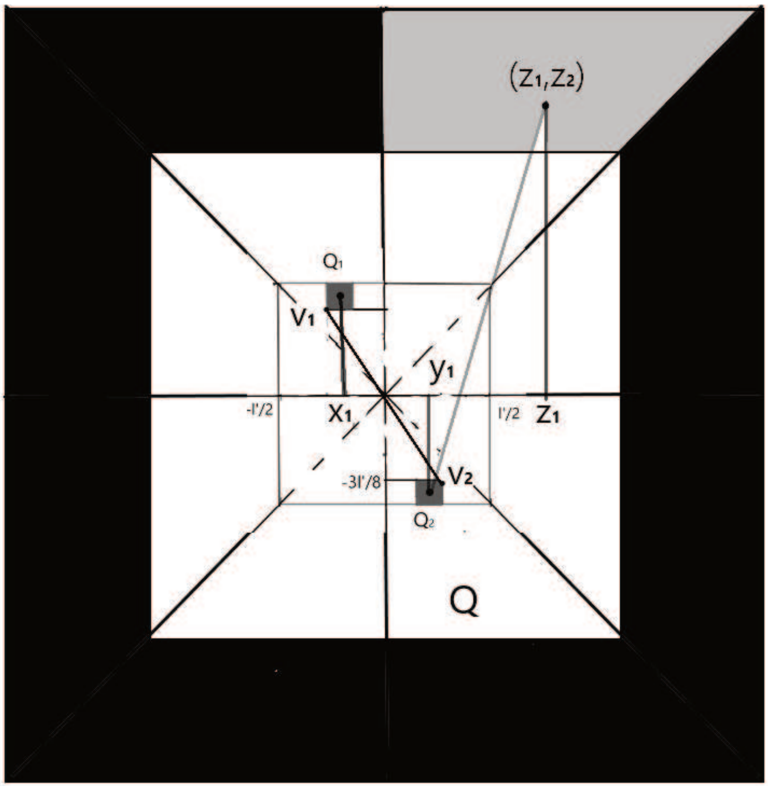

Figura 2.3: Los puntos de coordenadas x_1 y y_1 se hallan en los cubos Q_1 y Q_2, respectivamente. El punto (z_1, z_2) está en el conjunto $J_{1,2}^{2,2}$ y fuera de Q.

Ahora, ya que cualquier región $J_{i,j}^{k,l}$ puede obtenerse mediante una rotación y/o reflexión de $J_{1,2}^{2,2}$, se pueden conseguir cubos como Q_1 y Q_2 aplicando a estos los mismos movimientos rígidos con los cuales se obtiene la región dada desde $J_{1,2}^{2,2}$. Los cubos así conseguidos, para cada región $J_{i,j}^{k,l}$, verifican (2.6.9), para todo $z \in J_{i,j}^{k,l} - Q$. Extendemos lo anterior a $\mathbb{R}^3$ proporcionando así la idea para generalizar los siguientes argumentos a $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 3$, mediante inducción. Denotamos

$$J_{i_1,i_2,i_3}^{k_1,k_2,k_3} = \left\{(x_1, x_2, x_3) : 0 \leq (-1)^{k_1} x_{i_1} \leq (-1)^{k_2} x_{i_2} \leq (-1)^{k_3} x_{i_3}\right\} \tag{2.6.15}$$

con i_1, i_2 y i_3 distintos entre sí y valiendo 1, 2, o 3, y k_1, k_2 y k_3 valiendo 1 o 2. Como el caso de $\mathbb{R}^2$, se tiene

$$\mathbb{R}^3 = \bigcup J_{i_1,i_2,i_3}^{k_1,k_2,k_3}.$$

Sean Q un cubo de $\mathbb{R}^3$ con centro en 0 y lado l (como se considero antes), y $z = (z_1, z_2, z_3) \notin Q$. Supongamos que $z \in J_{1,2,3}^{k_1,k_2,k_3}$ y, para fijar ideas, $|z_2| > \frac{l}{2}$. Tenemos entonces que, si Q' es la proyección de Q sobre el plano que contiene los puntos de $\mathbb{R}^3$ con tercera coordenada 0 (el cual podemos identificar con $\mathbb{R}^2$), $(z_1, z_2) \in J_{1,2}^{k_1,k_2} - Q'$. Sean Q_1' y Q_2' los correspondientes cubos del plano que verifican (2.6.9). Si $k_3 = 2$ definimos

$$Q_1 = Q_1' \times \left[\frac{l'}{8}, \frac{l'}{4}\right]$$

y

$$Q_2 = Q_2' \times \left[-\frac{3l'}{8}, -\frac{l'}{4}\right].$$

Entonces $z_3 \geq 0$ y, si $x = (x_1, x_2, x_3) \in Q_1$ y $y = (y_1, y_2, y_3) \in Q_2$ (por lo que $(x_1, x_2) \in Q_1'$ y $(y_1, y_2) \in Q_2'$) tenemos, por un lado,

$$(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2 \leq (z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2,$$

debido a (2.6.9). Por otro lado, cuando $z_3 \geq \frac{l'}{4}$ resulta

$$|z_3 - y_3| = |x_3 - y_3| + |z_3 - x_3|.$$

Si $0 \leq z_3 < \frac{l'}{4}$, vemos que

$$|z_3 - x_3| \leq \frac{l'}{4} \leq |z_3 - y_3|.$$

De este modo, en ambos casos se deduce

$$|z_3 - x_3| \leq |z_3 - y_3|$$

y luego

$$|z - x| \leq |z - y|,$$

para todos $x \in Q_1$ y $y \in Q_2$. O sea, (2.6.9) se verifica en $\mathbb{R}^3$ con $z \in J_{1,2,3}^{k_1,k_2,k_3} - Q$, y Q_1 y Q_2 definidos arriba. Si $k_3 = 1$ (por lo cual $z_3 \leq 0$) se toman

$$Q_1 = Q_1' \times \left[-\frac{l'}{4}, -\frac{l'}{8}\right]$$

y

$$Q_2 = Q_2' \times \left[\frac{l'}{4}, \frac{3l'}{8}\right],$$

y se vuelve a deducir (2.6.9) como en el caso anterior. Se puede observar también que, en el caso particular recién dado, para $k_1 = 2$, si $z_2 > l/2$ entonces $(z_1, z_2) \in J_{1,2}^{2,2} - Q'$, lo que corresponde al caso en la figura 2.3, y si $z_2 < -l/2$ entonces $(z_1, z_2) \in J_{1,2}^{2,1} - Q'$, siendo $J_{1,2}^{2,1} - Q'$ la reflexión con respecto al eje $x_2 = 0$ de la región $J_{1,2}^{2,2} - Q'$. Así resulta

$x_1 \leq \text{mín}\{y_1, z_1\}$ cuando $k_1 = 2$. Para $k_1 = 1$, los cubos correspondientes y las respectivas regiones se obtienen por reflexión con respecto al eje $x_1 = 0$, y de este modo se tiene $x_1 \geq \text{máx}\{y_1, z_1\}$ (ver figura 2.3). Así, la idea de como se puede obtener (2.6.9) en $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 3$, mediante inducción, es clara. Además, tenemos que

$$Q_1 \cup Q_2 \subset \frac{2}{13} Q$$

y

$$|Q_1| = |Q_2| = \left(\frac{l}{104}\right)^n.$$

Más aún, podemos observar de la construcción de los cubos Q_1 y Q_2 lo siguiente: si $(z_1, \ldots, z_n) \notin Q$, para algún m, que suponemos mayor a 1 para fijar ideas, $|z_m| > l/2$ y hay un conjunto $J_{i_1,i_2}^{k_1,k_2}$ tal que $(z_{m-1}, z_m) \in J_{i_1,i_2}^{k_1,k_2}$. Luego, si Q_1' y Q_2' son las proyecciones de Q_1 y Q_2, respectivamente, sobre el plano que contiene a (z_{m-1}, z_m), entonces resulta $(x_{m-1}, x_m) \in Q_1'$, $(y_{m-1}, y_m) \in Q_2'$, para cualesquiera $(x_1, \ldots, x_n) \in Q_1$ y $(y_1, \ldots, y_n) \in Q_2$, y, por la forma en que se construyeron estos cubos,

$$x_{m-1} \leq \text{mín}\left\{y_{m-1}, z_{m-1}\right\}$$

o

$$\text{máx}\left\{y_{m-1}, z_{m-1}\right\} \leq x_{m-1},$$

y

$$|y_{m-1} - x_{m-1}| \geq \frac{l}{52}$$

(esto se aprecia en la figura 2.3 reemplazando 1 por $m - 1$). Por último, notemos que la invarianza por traslaciones de la geometría en $\mathbb{R}^n$ permite extender todos los hechos anteriores a cubos con lados paralelos a los ejes coordenados pero con centro en cualquier punto distinto del origen de coordenadas. Esto concluye la demostración.

□

Demostración del Teorema 2.1.9. Ahora, probemos que $w \in \mathcal{B}_1^\beta$. Sean $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_{\beta/10}$ y Q el cubo de centro ξ y lados de longitud $l = 2r/\sqrt{n}$ paralelos a los ejes coordenados ($Q \subset \overline{B}$). Observamos que, si $y \in \mathcal{E}_{\beta/2}(B)$ y $x \in B$, se tiene $y \in B\left(x, \frac{\beta}{2}\rho(x)\right)$, por lo cual

$$\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right) = 1.$$

De este modo, si f es una función que tiene soporte sobre $\mathcal{E}_{\beta/2}(B)$ y $R_j^\beta f$ está definida en casi todo punto de Ω, resulta

$$\begin{aligned} R_j^\beta f(x) &= \text{v.p.} \int_\Omega K_j(x-y)\, \eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right) f(y)dy \\ &= \text{v.p.} \int_\Omega K_j(x-y)\, f(y)dy = R_j f \chi_\Omega(x), \end{aligned} \tag{2.6.16}$$

para casi todo $x \in B$ y para cada $j = 1, ..., n$. Sean J una región como en (2.6.15) (extendida a $\mathbb{R}^n$ y trasladada en ξ) y $f = w\chi_{\mathcal{E}_{\beta/2}(B)\cap J-B}$. Para J y Q, sean Q_1 y Q_2 los correspondientes cubos dados por la Proposición 2.6.6. Luego, ya que

$$\begin{aligned} \left|R_j f - (R_j f)_{Q_1}\right| &\leq \left|R_j f - (R_j f)_B\right| \\ &\quad + \left|(R_j f)_B - (R_j f)_{Q_1}\right| \\ &\leq \left|R_j f - (R_j f)_B\right| \\ &\quad + |Q_1|^{-1} \int_{Q_1} \left|R_j f(x) - (R_j f)_B\right| dx, \end{aligned}$$

por un lado, de (2.6.7), (2.6.8), (2.6.16), y la hipótesis dada, respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{Q_2} \left|R_j f(y) - (R_j f)_{Q_1}\right| dy &\leq \int_{Q_2} \left|R_j f(y) - (R_j f)_B\right| dy \\ &\quad + \frac{|Q_2|}{|Q_1|} \int_{Q_1} \left|R_j f(x) - (R_j f)_B\right| dx \\ &\leq 2 \int_B \left|R_j f(x) - (R_j f)_B\right| dx \\ &= 2 \int_B \left|R_j^\beta f(x) - \left(R_j^\beta f\right)_B\right| dx \\ &\leq Cw(B). \end{aligned} \tag{2.6.17}$$

Por otro lado, tomamos $j = k$ siendo k el entero positivo para el cual vale (2.6.10). Entonces, para todos $x \in Q_1$, $y \in Q_2$ y $z \in \mathcal{E}_{\beta/2}(B) \cap J - B$, de (2.6.9) y (2.6.11), se deduce

$$\begin{aligned} \frac{y_j - z_j}{|y - z|^{n+1}} - \frac{x_j - z_j}{|x - z|^{n+1}} &= \frac{y_j - z_j}{|y - z|^{n+1}} + \frac{z_j - x_j}{|x - z|^{n+1}} \\ &\geq \frac{y_j - x_j}{|y - z|^{n+1}} \geq \frac{l}{52\,|y - z|^{n+1}}. \end{aligned}$$

Ahora, ya que $y \in B$ y $z \notin B$, se tiene

$$|y - z| < r + |\xi - z| \leq 2\,|\xi - z|$$

y luego, en lo anterior resulta

$$\frac{y_j - z_j}{|y - z|^{n+1}} - \frac{x_j - z_j}{|x - z|^{n+1}} > \frac{l}{2^{n+1}52\,|\xi - z|^{n+1}}. \tag{2.6.18}$$

Entonces, de (2.6.17) y (2.6.18) se obtiene

$$\begin{aligned} &\frac{l\,|Q_2|\,|Q_1|}{2^{n+1}52} \int_{\mathcal{E}_{\beta/2}(B)\cap J-B} \frac{w(z)}{|\xi - z|^{n+1}} dz \\ &\leq \int_{Q_2} \int_{Q_1} \int_\Omega \left(\frac{y_j - z_j}{|y - z|^{n+1}} - \frac{x_j - z_j}{|x - z|^{n+1}} \right) f(z)\, dz dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{Q_2}\left|\int_{Q_1}\left(R_jf\left(y\right)-R_jf\left(x\right)\right)dx\right|dy\\
&= \left|Q_1\right|\int_{Q_2}\left|R_jf\left(y\right)-\left(R_jf\right)_{Q_1}\right|dy\leq C\left|Q_1\right|w\left(B\right).
\end{aligned}$$

Así, de la definición de l y (2.6.8), conseguimos

$$\int_{\mathcal{E}_{\beta/2}(B)\cap J-B}\frac{r^{n+1}w\left(z\right)}{\left|\xi-z\right|^{n+1}}dz\leq 52\left(104\right)^n n^{\frac{n+1}{2}}Cw\left(B\right).$$

Por último, ya que hay un número finito de conjuntos J (que depende solo de n y crece con n) y su unión es $\mathbb{R}^n$, se concluye

$$\int_{\mathcal{E}_{\beta/2}(B)-B}\frac{r^{n+1}w\left(z\right)}{\left|\xi-z\right|^{n+1}}dz\leq Cw\left(B\right), \tag{2.6.19}$$

para toda $B=B\left(\xi,r\right)\in\mathcal{F}_{\beta/10}$. Por lo tanto, $w\in\widetilde{\mathcal{B}}_1^{\beta/2}$ por el Lema 2.6.2 y luego, por los Lemas 2.6.4 y 2.5.16, $w\in\mathcal{B}_1^{\beta}$.

A continuación pasamos a probar que $w\in A_\infty^\beta$. Para ello es suficiente ver que existe $C>0$ tal que, para cualquier $B\in\mathcal{F}_\beta$, se tiene

$$\int_{\widetilde{B}}\left|R_j^\beta(w\chi_B)\right|dx\leq C\int_B w\ dx, \tag{2.6.20}$$

dado que, por el Teorema 2.4.23, esto implica $w\in A_\infty^\beta$. Primero, sea $B\in\mathcal{F}_\beta-\mathcal{F}_{\beta/25}$ y consideremos un cubrimiento tipo Whitney $\mathcal{W}$ para Ω dado por el Lema 1.0.6. Por dicho lema, sabemos que la familia

$$\mathcal{W}(B)=\{P\in\mathcal{W}:P\cap\mathcal{N}_\beta(B)\neq\varnothing\}$$

es finita con $\sharp\mathcal{W}(B)\leq M$, donde M es un número independiente de B. Si para cualquier $V\in\mathcal{F}_\beta$ se denota por V^* a la bola máxima en la familia concéntrica con V, esto es $V^*=B(x_V,\beta\rho(x_V))$, siendo x_V el centro de V, se puede escoger para cada $P\in\mathcal{W}(B)$ una bola máxima B_P^* tal que $P\cap B_P^*\neq\varnothing$ y $B_P^*\cap B\neq\varnothing$. Entonces, dado que P^* es una de las bolas de la nube $\mathcal{N}_\beta(B_P^*)$, B_P^* es una bola de la nube $\mathcal{N}_\beta(B)$, y w duplica sobre estas nubes, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{B}}\left|R_j^\beta(w\chi_B)\right|dx &\leq \int_{\mathcal{N}_\beta(B)}\left|R_j^\beta(w\chi_B)\right|dx\\
&\leq \sum_{P\in\mathcal{W}(B)}\int_{P^*}\left|R_j^\beta(w\chi_B)\right|dx\\
&\leq \left\|R_j^\beta(w\chi_B)\right\|_{BMO_w^\beta}\sum_{P\in\mathcal{W}(B)}w(P^*)\\
&\leq C\left\|\chi_B\right\|_\infty\sum_{P\in\mathcal{W}(B)}w\left(\mathcal{N}_\beta(B_P^*)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C' \sum_{P\in\mathcal{W}(B)} w(B_P^*) \\
&\leq C'M\ w\left(\mathcal{N}_\beta(B)\right) \leq C''M\ w(B).
\end{aligned}
$$

Así, conseguimos (2.6.20), para toda $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\beta/25}$. Ahora, sea $B \in \mathcal{F}_{\beta/25}$ y denotemos $f = w\chi_B$, $f_1 = w\chi_{\frac{1}{2}B}$ y $f_2 = w\chi_{B-\frac{1}{2}B}$. Por un lado, ya que el radio de B es $\left(\frac{|B|}{C_n}\right)^{1/n}$, vemos que para casi todo $x \in B - \frac{3}{4}B$ se tiene

$$
\left|R_j^\beta f_1\left(x\right)\right| \leq \int_{\frac{1}{2}B} \frac{w\left(y\right)}{\left|x-y\right|^n} dy \leq \frac{4^n C_n}{|B|} w\left(\frac{1}{2}B\right).
$$

Luego, teniendo en cuenta que, por la hipótesis dada y la duplicación de w, tenemos

$$
\begin{aligned}
\int_{B-\frac{3}{4}B} \left(\left|\left(R_j^\beta f_1\right)_{5B}\right| - \left|R_j^\beta f_1\right|\right) dx &\leq \int_{5B} \left|R_j^\beta f_1 - \left(R_j^\beta f_1\right)_{5B}\right| dx \\
&\leq C \left\|\chi_{\frac{1}{2}B}\right\|_\infty w\left(5B\right) \\
&\leq C' w\left(B\right),
\end{aligned}
$$

se consigue

$$
\begin{aligned}
\left|B - \frac{3}{4}B\right| \left|\left(R_j^\beta f_1\right)_{5B}\right| &\leq C' w\left(B\right) + \int_{B-\frac{3}{4}B} \left|R_j^\beta f_1\right| dx \\
&\leq C' w\left(B\right) + \frac{4^n C_n}{|B|} w\left(\frac{1}{2}B\right) \left|B - \frac{3}{4}B\right|,
\end{aligned}
$$

o sea,

$$
\begin{aligned}
\left|\left(R_j^\beta f_1\right)_{5B}\right| &\leq \frac{C'}{\left|B - \frac{3}{4}B\right|} w\left(B\right) + \frac{4^n C_n}{|B|} w\left(\frac{1}{2}B\right) \\
&\leq \left(\frac{C'}{1-\left(3/4\right)^n} + 4^n C_n\right) \frac{w\left(B\right)}{|B|}. \qquad (2.6.21)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, vemos que para casi todo $x \in \frac{1}{4}B$ se tiene

$$
\left|R_j^\beta f_2\left(x\right)\right| \leq \int_{B-\frac{1}{2}B} \frac{w\left(y\right)}{\left|x-y\right|^n} dy \leq \frac{4^n C_n}{|B|} w\left(B - \frac{1}{2}B\right).
$$

Luego, dado que tenemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{4}B} \left(\left|\left(R_j^\beta f_2\right)_{5B}\right| - \left|R_j^\beta f_2\right|\right) dx &\leq \int_{5B} \left|R_j^\beta f_2 - \left(R_j^\beta f_2\right)_{5B}\right| dx \\
&\leq C \left\|\chi_{B-\frac{1}{2}B}\right\|_\infty w\left(5B\right) \\
&\leq C' w\left(B\right),
\end{aligned}
$$

nuevamente por la hipótesis dada y la duplicación de w, se consigue

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{4}B\right|\left|\left(R_j^\beta f_2\right)_{5B}\right| &\leq C'w\left(B\right)+\int_{\frac{1}{4}B}\left|R_j^\beta f_2\right|dx\\ &\leq C'w\left(B\right)+\frac{4^nC_n}{|B|}w\left(B-\frac{1}{2}B\right)\left|\frac{1}{4}B\right|,\end{aligned}$$

o sea,

$$\begin{aligned}\left|\left(R_j^\beta f_2\right)_{5B}\right| &\leq \frac{C'}{\left|\frac{1}{4}B\right|}w\left(B\right)+\frac{4^nC_n}{|B|}w\left(B-\frac{1}{2}B\right)\\ &\leq \left(4^nC'+4^nC_n\right)\frac{w\left(B\right)}{|B|}.\end{aligned} \tag{2.6.22}$$

Por último, ya que $f=f_1+f_2$, de la linealidad de las transformadas de Riesz locales y los promedios, junto con (2.6.21), (2.6.22), la hipótesis dada y la duplicación de w, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{5B}\left|R_j^\beta f\right|dx &\leq \int_{5B}\left|R_j^\beta f-\left(R_j^\beta f\right)_{5B}\right|dx+\int_{5B}\left|\left(R_j^\beta f\right)_{5B}\right|dx\\ &\leq C\left\|\chi_B\right\|_\infty w\left(5B\right)+|5B|\left(\left|\left(R_j^\beta f_1\right)_{5B}\right|+\left|\left(R_j^\beta f_2\right)_{5B}\right|\right)\\ &\leq C'w\left(B\right)+C''\frac{|5B|\,w\left(B\right)}{|B|}=\left(C'+5^nC''\right)w\left(B\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto, conseguimos (2.6.20), para toda $B\in\mathcal{F}_{\beta/25}$, que es lo que queríamos. □

2.7. Relación entre las clases A_∞^β y $\mathcal{B}_p^\beta$

En esta sección estudiaremos la relación entre los pesos de la clase A_∞^β y los de la clase $\mathcal{B}_p^\beta$.

Observación 2.7.1. Si μ es una medida de Borel sobre Ω que duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$, no es difícil ver que existen $C_\beta,\ \theta_\beta\geq 1$ tales que, para todos $B\in\mathcal{F}_\beta$ y $t>1$, se tiene

$$\mu\left(B\right)\leq C_\beta t^{\theta_\beta}\mu\left(t^{-1}B\right). \tag{2.7.2}$$

Proposición 2.7.3. *Si $p>0$ y $1\leq q<1+p/\theta_\beta$ entonces $A_q^\beta\subset\mathcal{B}_p^\beta$.*

Demostración. Sea $w\in A_q^\beta$. Si $B\in\mathcal{F}_\beta$ y $E\subset B$ es medible, de igual manera que en el caso de las clases A_q usuales, se tiene

$$\left(\frac{\mu\left(E\right)}{\mu\left(B\right)}\right)^q\leq C\frac{w\left(E\right)}{w\left(B\right)}, \tag{2.7.4}$$

siendo C una constante que es independiente de B y E. Ahora, sean $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_\beta$ y k_0 el número natural tal que $2^{-k_0}\beta\rho(\xi) < r \leq 2^{-k_0+1}\beta\rho(\xi)$. Si denotamos $r_0 = 2^{-k_0}\beta\rho(\xi)$ y $B_0 = B(\xi, r_0)$, tenemos

$$B_0 \subset B \subset 2B_0$$

y $2^k B_0 \in \mathcal{F}_\beta$, con $k = 1, \ldots, k_0$. Entonces, por la duplicación de μ y w, (2.7.4), y (2.7.2), resulta

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{E}_\beta(B)-B} \frac{\mu(B)\, r^p w(x) d\mu(x)}{\mu(B(\xi, d(\xi,x)))\, d(\xi,x)^p} \\
\leq\ & \sum_{k=0}^{k_0-1} \int_{2^{k+1}B_0 - 2^k B_0} \frac{\mu(2B_0)(2r_0)^p\, w(x) d\mu(x)}{\mu(2^k B_0)(2^k r_0)^p} \\
\leq\ & 2^p C \sum_{k=0}^{k_0-1} 2^{-kp} \frac{\mu(B_0)\, w(2^k B_0)}{\mu(2^k B_0)} \\
\leq\ & 2^p C w(B_0) \sum_{k=0}^{k_0-1} 2^{-kp} \left(\frac{\mu(2^k B_0)}{\mu(B_0)}\right)^{q-1} \\
\leq\ & 2^p C C_\beta^{q-1} w(B_0) \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{\theta_\beta(q-1)-p}\right)^k \leq C' w(B),
\end{aligned}$$

con $C' < \infty$, ya que $\theta_\beta(q-1) - p < 0$. Luego, $w \in \mathcal{B}_p^\beta$, por el Lema 2.6.4. $\square$

Consideramos ahora el espacio euclídeo, esto es $X = \mathbb{R}^n$, $d = |\cdot|$, y $d\mu = dx$. Veremos que, para clases usuales (no locales) de pesos, no es cierto que $A_\infty(\mathbb{R}^n)$ sea una subclase de $\mathcal{B}_p(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 2.7.5. *Si $p > 0$ y $q > 1 + p/n$, $A_q(\mathbb{R}^n) - \mathcal{B}_p(\mathbb{R}^n) \neq \varnothing$.*

Demostración. Sean $a \in (p, n(q-1))$ y $w(x) = |x|^a$. Es sabido que $w \in A_q(\mathbb{R}^n)$. Si $m \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,m+1)-B(0,1)} \frac{|B(0,1)|\, w(x)}{|B(0,|x|)|\, |x|^p} dx &= \int_{B(0,m+1)-B(0,1)} |x|^{a-n-p} dx \\
&= C_n \int_1^{m+1} t^{a-p-1} dt \\
&= C_n \frac{(m+1)^{a-p} - 1}{a-p},
\end{aligned}$$

y de este modo

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n - B(0,1)} \frac{|B(0,1)|\, w(x)}{|B(0,|x|)|\, |x|^p} dx \\
\geq\ & \lim_{m\to\infty} \int_{B(0,m+1)-B(0,1)} \frac{|B(0,1)|\, w(x)}{|B(0,|x|)|\, |x|^p} dx = \infty.
\end{aligned}$$

Entonces, para cualquier $C>0$ resulta

$$\int_{\mathbb{R}^n-B(0,1)} \frac{|B(0,1)|\, w(x)}{|B(0,|x|)|\,|x|^p} dx > Cw(B(0,1)),$$

por lo que $w \notin \mathcal{B}_p(\mathbb{R}^n)$. □

Podemos ver también que lo anterior es cierto para clases de pesos locales.

Proposición 2.7.6. *Dados $\beta \in (0,1)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto propio no vacío, si $p>0$ y $q>1+p/n$, $A_q^\beta(\Omega) - \mathcal{B}_p^\beta(\Omega) \neq \varnothing$.*

Demostración. Sean $x_0 \in \Omega$ y $a \in (p, n(q-1))$. Es sabido que $|\cdot - x_0|^a \in A_q(\mathbb{R}^n)$. Luego, si $w(x) = |x-x_0|^a \chi_\Omega(x)$, $w \in A_q^\beta(\Omega)$. Sean $d_0 = d(x_0, \Omega^c) > 0$ y $B_m = B(x_0, \beta d_0/m)$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Entonces, $\{B_m\} \subset \mathcal{F}_\beta$ y, si $m \geq 2$, por un lado se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}_\beta(B_m)-B_m} \frac{(\beta d_0/m)^{n+p}\, w(x)}{|x-x_0|^{n+p}} dx &\geq \int_{B_1-B_m} \frac{(\beta d_0/m)^{n+p}\, w(x)}{|x-x_0|^{n+p}} dx \\
&= (\beta d_0/m)^{n+p} \int_{B_1-B_m} |x-x_0|^{a-n-p} dx \\
&= C_n (\beta d_0/m)^{n+p} \int_{\beta d_0/m}^{\beta d_0} t^{a-p-1} dt \\
&= C_n (\beta d_0/m)^{n+p} \frac{(\beta d_0)^{a-p} - (\beta d_0/m)^{a-p}}{a-p} \\
&= C_n (\beta d_0)^{n+a} m^{-n-p} \frac{1-(1/m)^{a-p}}{a-p}.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
w(B_m) &= \int_{B_m} |x-x_0|^a dx = C_n \int_0^{\beta d_0/m} t^{a+n-1} dt \\
&= C_n \frac{(\beta d_0/m)^{a+n}}{a+n} = C_n (\beta d_0)^{a+n} \frac{m^{-a-n}}{a+n}.
\end{aligned}$$

Así resulta

$$\begin{aligned}
\frac{\int_{\mathcal{S}_\beta(B_m)-B_m} \frac{(\beta d_0/m)^{n+p} w(x)}{|x-x_0|^{n+p}} dx}{w(B_m)} &\geq m^{a-p} \frac{(a+n)\left(1-(1/m)^{a-p}\right)}{a-p} \\
&= \frac{(a+n)(m^{a-p}-1)}{a-p},
\end{aligned}$$

para cada $m \geq 2$. Por lo tanto

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\int_{\mathcal{S}_\beta(B_m)-B_m} \frac{(\beta d_0/m)^{n+p} w(x)}{|x-x_0|^{n+p}} dx}{w(B_m)} = \infty$$

y de este modo, para cada $C > 0$, hay un $m \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, tal que

$$\int_{\mathcal{S}_{\beta}(B_m)-B_m} \frac{(\beta d_0/m)^{n+p}\, w\,(x)}{|x-x_0|^{n+p}} dx > Cw\,(B_m)\,.$$

Entonces, $w \notin \mathcal{B}_p^{\beta}$. □

Lo probado arriba muestra que, para cualquier $p > 0$, $A_{\infty}^{\beta}\,(\Omega)$ no es una subclase de $\mathcal{B}_p^{\beta}\,(\Omega)$, con Ω subconjunto de $\mathbb{R}^n$. A continuación se verá que tampoco vale, en general, la contención inversa.

Proposición 2.7.7. *Para cada $\beta \in (0,1)$, si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto propio que contiene al cubo $[0,1]^n$, existe $p_n > 0$ tal que, para cualquier $p \geq p_n$, $\mathcal{B}_p^{\beta}\,(\Omega) - A_{\infty}^{\beta}\,(\Omega) \neq \varnothing$.*

Demostración. Sea w_1 el peso construido en [FM74] sobre la recta real de la siguiente manera: Para cada $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos $f_m(x) = 1/2$, si $0 < x \leq 4^{-m-1}$ o $3 \cdot 4^{-m-1} < x \leq 4^{-m}$, y $f_m(x) = 3/2$ para $4^{-m-1} < x \leq 3 \cdot 4^{-m-1}$, extendiéndose de forma periódica sobre $(4^{-m}, 1]$. Denotemos con $n(x)$ al entero positivo tal que

$$4^{-n(x)-1} < x \leq 4^{-n(x)},$$

para $0 < x \leq 1$. Entonces, se define

$$w_1(x) = \prod_{m=0}^{2n(x)} f_m(x)$$

para $0 < x \leq 1$, $w_1(x) = 1$ para $x > 1$ y $w_1(x) = w_1(-x)$ si $x \leq 0$. Dado $k \in \mathbb{N}$, denotando

$$I_k = \left(4^{-k}/2, 4^{-k}\right)$$

y

$$E_k = \left\{x \in I_k : w_1\,(x) > 3^{\frac{2k}{3}} 2^{-2k-1}\right\},$$

se prueba en [FM74] que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|E_k|}{|I_k|} = 0 \tag{2.7.8}$$

y

$$\lim_{k\to\infty} \frac{w_1\,(E_k)}{w_1\,(I_k)} = 1, \tag{2.7.9}$$

por lo que $w_1 \notin A_{\infty}(\mathbb{R})$, pero w_1 duplica sobre $\mathbb{R}$, o sea, existe $C > 0$ tal que, para todos $r > 0$ y $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\int_{x-r}^{x+r} w_1\,(t)\,dt \leq C \int_{x-\frac{r}{2}}^{x+\frac{r}{2}} w_1\,(t)\,dt. \tag{2.7.10}$$

Ahora definimos

$$w_n\,(x_1, \ldots, x_n) = w_1\,(x_1)\,.$$

Veamos que w_n duplica sobre $\mathbb{R}^n$. Sean $n>1$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, $r>0$ y, para cada $z\in\mathbb{R}^n$ y $l>0$, $Q(z,l)$ el cubo de centro z y lados de longitud l paralelos a los ejes coordenados. Entonces, ya que

$$B(\xi,r)\subset Q(\xi,2r)$$

y

$$Q\left(\xi,r/\sqrt{n}\right)\subset B(\xi,r/2),$$

teniendo en cuenta (2.7.10), se puede deducir que hay una constante $C_n>0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\int_{B(\xi,r)} w_n(x)\,dx\\
\le\ &\int_{Q(\xi,2r)} w_n(x)\,dx\\
=\ &\int_{\xi_n-r}^{\xi_n+r}\dots\int_{\xi_2-r}^{\xi_2+r}\int_{\xi_1-r}^{\xi_1+r} w_1(x_1)\,dx_1dx_2\dots dx_n\\
\le\ &\left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^{n-1}\left(2\sqrt{n}\right)^{n-1}C_n\int_{\xi_1-\frac{r}{2\sqrt{n}}}^{\xi_1+\frac{r}{2\sqrt{n}}} w_1(x_1)\,dx_1\\
=\ &\left(2\sqrt{n}\right)^{n-1}C_n\int_{\xi_n-\frac{r}{2\sqrt{n}}}^{\xi_n+\frac{r}{2\sqrt{n}}}\dots\int_{\xi_2-\frac{r}{2\sqrt{n}}}^{\xi_2+\frac{r}{2\sqrt{n}}}\int_{\xi_1-\frac{r}{2\sqrt{n}}}^{\xi_1+\frac{r}{2\sqrt{n}}} w_1(x_1)\,dx_1dx_2\dots dx_n\\
=\ &\left(2\sqrt{n}\right)^{n-1}C_n\int_{Q\left(\xi,r/\sqrt{n}\right)} w_n(x)\,dx\\
\le\ &\left(2\sqrt{n}\right)^{n-1}C_n\int_{B(\xi,r/2)} w_n(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Pasamos ahora a construir subconjuntos de Ω sobre los cuales w_n no verifique la condición (iv) del Teorema 2.2.1. Con este fin, ponemos $\xi^k=3\cdot 4^{-k-1}(1,1,\dots,1)$ y $I_k^n=Q\left(\xi^k,2\cdot 4^{-k-1}\right)$ (notar que $I_k^1=I_k$). Entonces,

$$I_k^n\subset B\left(\xi^k,4^{-k-1}\sqrt{n}\right)=B_k.$$

Dado $\beta\in(0,1)$, como $\left\{\xi^k\right\}_k\subset[0,1]^n$ y $d\left([0,1]^n,\Omega^c\right)$ es estrictamente positiva, podemos tomar un k_0 suficientemente grande tal que, para cada $k\ge k_0$,

$$4^{-k-1}\sqrt{n}<\beta d\left([0,1]^n,\Omega^c\right)\le\beta d\left(\xi^k,\Omega^c\right).$$

Así, $B_k\in\mathcal{F}_\beta$, para cada $k\ge k_0$. Luego, por un lado,

$$E_k\times I_k^{n-1}=\{x: x_1\in E_k,\ x_j\in I_k,\ j=2,\dots,n\}\subset I_k^n\subset B_k$$

y además

$$\begin{aligned}
\frac{\left|E_k\times I_k^{n-1}\right|}{|B_k|}&=\frac{|E_k|\,|I_k|^{n-1}}{|B(0,1)|\left(4^{-k-1}\sqrt{n}\right)^n}\\
&=\frac{2^n}{|B(0,1)|\left(\sqrt{n}\right)^n}\frac{|E_k|}{|I_k|},
\end{aligned}$$

por lo cual, de (2.7.8),

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|E_k \times I_k^{n-1}\right|}{|B_k|} = 0.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} w_n\left(E_k \times I_k^{n-1}\right) &= \int_{I_k} \dots \int_{I_k} \int_{E_k} w_1(x_1)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= w_1(E_k)\, |I_k|^{n-1} \end{aligned}$$

y, por la duplicación de w_n,

$$\begin{aligned} w_n(B_k) &\leq C_n' w_n\left(I_k^n\right) \\ &= C_n' \int_{I_k} \dots \int_{I_k} \int_{I_k} w_1(x_1)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= C_n' \,|I_k|^{n-1} w_1(I_k). \end{aligned}$$

De este modo tenemos

$$\frac{w_n\left(E_k \times I_k^{n-1}\right)}{w_n(B_k)} \geq \frac{w_1(E_k)}{C_n' w_1(I_k)},$$

donde, por (2.7.9), el lado derecho tiende a $1/C_n'$, lo cual se puede suponer no mayor a 1. Por lo tanto, dado cualquier $\alpha \in (0,1)$, podemos hallar $k > k_0$, suficientemente grande, tal que

$$\frac{\left|E_k \times I_k^{n-1}\right|}{|B_k|} < \alpha$$

y

$$\frac{w_n\left(E_k \times I_k^{n-1}\right)}{w_n(B_k)} > \frac{1}{2C_n'},$$

donde $E_k \times I_k^{n-1} \subset B_k \in \mathcal{F}_\beta$. Entonces, por el Teorema 2.2.1, $w_n\chi_\Omega \notin A_\infty^\beta(\Omega)$.

Ahora veamos que, para algún $p_n > 0$, $w_n\chi_\Omega \in \mathcal{B}_p^\beta(\Omega)$, para todo $p \geq p_n$. Como w_n duplica sobre bolas de $\mathbb{R}^n$, si denotamos C_n a alguna constante de duplicación mayor a 1, no es difícil ver que, para cada $t > 1$ y para toda bola B, se tiene

$$w_n(B) \leq C_n t^{\log_2 C_n} w_n\left(t^{-1}B\right).$$

Tomamos $p_n = \log_2 C_n > 0$. Entonces, si $p \geq p_n$ y $\varepsilon = n + p - p_n$, resulta $0 < \varepsilon < n + p$ y, por la desigualdad de arriba,

$$w_n(B) \leq C_n t^{n+p-\varepsilon} w_n\left(t^{-1}B\right),$$

para cada $t > 1$ y toda bola B. Así, por el Lema 2.5.22, $w_n\chi_\Omega \in \mathcal{B}_p^\beta(\Omega)$. $\square$

Capítulo 3

Estimaciones a priori en espacios BMO_w^β

3.1. Preliminares y teoremas de acotación

En este capítulo consideramos el contexto euclídeo, $X = \mathbb{R}^n$, d la distancia euclídea y μ la medida de Lebesgue. Obtenemos una estimación a priori interior sobre un dominio Ω (abierto de $\mathbb{R}^n$ conexo y acotado), para ciertos operadores diferenciales elípticos, con normas en un espacio BMO relacionado a un peso A_p local sobre Ω. Con este objetivo demostramos la acotación en tales normas de ciertas integrales singulares locales y sus conmutadores, Teoremas 3.1.19 y 3.1.21, en la sección 3.3, y Teorema 3.1.23, en la sección 3.4. Con el propósito de enunciar tales teoremas, consideraremos a continuación las definiciones necesarias.

Sean w un peso que duplica sobre $\mathcal{F}_\beta(\Omega)$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto propio, $\rho(\xi) = d(\xi, \Omega^c)$ para cada $\xi \in \Omega$. Se consideran las siguientes definiciones.

Definición 3.1.1. *Diremos que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ es una función de $BMO^\beta_{w,q}$, con $1 \leq q < \infty$, si existe $C \geq 1$ constante (que puede depender de β, q y w), tal que*

$$\frac{|B|}{w(B)} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C$$

para $B \in \mathcal{F}_{\frac{\beta}{5}}$, y

$$\frac{|B|}{w(B)} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C$$

para $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\frac{\beta}{5}}$. Si $f \in BMO^\beta_{w,q}$ se define $[f]_{BMO^\beta_{w,q}}$ como el ínfimo de las constantes que verifican ambas desigualdades. Se denota BMO^β_q a $BMO^\beta_{w,q}$ con $w \equiv 1$ sobre Ω.

Observación 3.1.2. Como en el Lema 2.1.6, se puede demostrar que $f \in BMO_{w,q}^\beta$ es equivalente a que existen $N \in \mathbb{N}$ $(N \geq 2)$, $C_N \geq 1$ tales que

$$\frac{|B|}{w(B)}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f(x)-f_B|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_N \tag{3.1.3}$$

para $B \in \mathcal{F}_{\frac{\beta}{N}}$, y

$$\frac{|B|}{w(B)}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_N \tag{3.1.4}$$

para $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\frac{\beta}{N}}$.

Definición 3.1.5. *Diremos que $f \in BMO_q^\beta$ es una función de LMO_q^β, con $1 \leq q < \infty$, si existe $C \geq 1$ tal que*

$$\left(1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{r}\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f(x)-f_B|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C, \tag{3.1.6}$$

para toda $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_\beta$. Si $f \in LMO_q^\beta$ se define $[f]_{LMO_q^\beta}$ como el ínfimo de las constantes que verifican (3.1.6)*. Se denota LMO^β a LMO_1^β .*

Se probará en la sección 3.2 que si $w \in RH_q^\beta$, con $1 < q < \infty$, se tiene que, para cada $\alpha, \beta \in (0,1)$ y $s \in (1,q)$, los espacios BMO_w^α, BMO_w^β y $BMO_{w,s}^\beta$ son equivalentes en el siguiente sentido: existen constantes positivas $C_{\alpha,\beta}$ y $C_{\beta,s}$ tales que

$$C_{\alpha,\beta}^{-1}[f]_{BMO_w^\alpha} \leq [f]_{BMO_w^\beta} \leq C_{\alpha,\beta}[f]_{BMO_w^\alpha}$$

y

$$[f]_{BMO_w^\beta} \leq [f]_{BMO_{w,s}^\beta} \leq C_{\beta,s}[f]_{BMO_w^\beta} \ .$$

Por otro lado, para los espacios LMO se tiene, para cada $\alpha, \beta \in (0,1)$ y $s \in (1,\infty)$, la igualdad de los espacios LMO^α, LMO^β y LMO_s^β, pero no se dispone necesariamente de una equivalencia de seminormas. Sin embargo, hay una constante $C_{\beta,s} \geq 1$ tal que

$$[f]_{LMO_s^{\beta/\sqrt{n}}} \leq C_{\beta,s}[f]_{LMO^\beta} .$$

Consideraremos ahora un núcleo integral $K : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}$ que verifica las siguientes condiciones: Existe $C > 0$ tal que, para todo $x \neq 0$,

$$|K(x)| \leq \frac{C}{|x|^n}; \tag{3.1.7}$$

para cada $x \neq 0$ y $\lambda > 0$,

$$K(\lambda x) = \lambda^{-n} K(x), \tag{3.1.8}$$

o sea, K es *homogéneo de grado* $-n$; existen constantes positivas C y δ para las cuales

$$|K(x-y) - K(x)| \leq C\frac{|y|^\delta}{|x|^{n+\delta}}, \tag{3.1.9}$$

siempre que $|x| > 2|y|$; y

$$\int_{S^{n-1}} K(y)d\sigma(y) = 0\,. \tag{3.1.10}$$

Denotaremos

$$C_K = \inf\{C:\ C \text{ verifica (3.1.7) y (3.1.9)}\}. \tag{3.1.11}$$

Es conocido que el operador definido por

$$Th = \text{v.p.}K * h,$$

con K satisfaciendo (3.1.7), (3.1.9) y (3.1.10) con constante C_K, verifica

$$\|Th\|_{L^p} \le CC_K \|h\|_{L^p}$$

para toda $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < \infty$ y C independiente de K.

Se considerará el siguiente operador integral

$$T^{\beta,\eta} f(x) = \text{v.p.} \int_\Omega K(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right) f(y)dy, \tag{3.1.12}$$

donde $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $\eta \in \mathcal{C}^\infty([0,\infty))$ es tal que $0 \le \eta \le 1$, $\eta(t) = 0$ si $t \ge 1$, y $\eta(t) = 1$ si $0 \le t \le 1/2$. Diremos que $T^{\beta,\eta}$ es una *integral singular β-local.*

Observación 3.1.13. Veamos que, por (3.1.8) y (3.1.10), se tiene

$$\int_{r<|x-y|<R} K(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right) dy = 0, \tag{3.1.14}$$

para todos $0 < r < R < \infty$ y $x \in \mathbb{R}^n$. En efecto, haciendo el cambio a coordenadas polares obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{r<|x-y|<R} K(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right) dy &= \int_r^R \int_{S^{n-1}} K(tu)\eta\left(\frac{|tu|}{\beta\rho(x)}\right) t^{n-1} d\sigma(u)dt \\
&= \int_r^R \int_{S^{n-1}} t^{-n}K(u)\eta\left(\frac{t}{\beta\rho(x)}\right) t^{n-1} d\sigma(u)dt \\
&= \int_r^R \int_{S^{n-1}} K(u)d\sigma(u)\eta\left(\frac{t}{\beta\rho(x)}\right) t^{-1}dt = 0
\end{aligned}$$

ya que

$$0 \le \int_r^R \eta\left(\frac{t}{\beta\rho(x)}\right) t^{-1}dt \le \log\frac{R}{r} < \infty.$$

Notemos también que $T^{\beta,\eta} f(x)$ está bien definida, si $f \in BMO_w^\beta$ con $w \in RH_q^\beta$ para algún $q > 1$, por

$$T^{\beta,\eta} f(x) = T^{\beta,\eta}\left(f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right)(x) \tag{3.1.15}$$

para c. t. p. $x \in B$ con $B \in \mathcal{F}_\beta$. En efecto, si $E \subset \Omega$ es compacto, $1 < s < q$ y $\mathcal{W} = \{P_j\}$ es un cubrimiento tipo Whitney como en la Observación 3.2.4 con $a = \beta/85$, tenemos

$$\left(\int_E |f|^s dx\right)^{1/s} \le \sum_{j:P_j\cap E\ne\varnothing} \left(\int_{P_j} |f|^s dx\right)^{1/s} \le [f]_{BMO^\beta_{w,s}} \sum_{j:P_j\cap E\ne\varnothing} \frac{w(P_j)}{|P_j|^{1/s'}},$$

donde la suma de arriba es finita y (como veremos más adelante en el Lema 3.2.23)

$$[f]_{BMO_{w,s}^\beta} \leq C[f]_{BMO_w^\beta}$$

con C independiente de f. Entonces, $f\chi_E \in L^s(\Omega)$ y luego, por la Observación 2.3.1, queda probada nuestra afirmación.

Ahora, recordamos una definición dada en el capítulo anterior pero, en este caso, expresada en el contexto euclídeo.

Definición 3.1.16. *Sean $p > 0$ y w un peso ($w \in L^1_{loc}(\Omega)$ y no-negativo en casi todo punto de Ω). Denotaremos $w \in \mathcal{B}_p^\beta$ si*

$$\sup_{B(\xi,r)\in\mathcal{F}_\beta} \frac{r^{n+p}}{w(B(\xi,r))} \int_{\mathcal{S}_\beta(B(\xi,r))-B(\xi,r)} \frac{w(x)dx}{|\xi - x|^{n+p}} < \infty. \tag{3.1.17}$$

Observación 3.1.18. Es fácil probar que $w \in \mathcal{B}_p^\beta$ es equivalente a que

$$\sup_{B(\xi,r)\in\mathcal{F}_\beta} \frac{r^{n+p}}{w(B(\xi,r))} \int_{\mathcal{N}_\beta(B(\xi,r))-B(\xi,r)} \frac{w(x)dx}{|\xi - x|^{n+p}} < \infty.$$

Más aún, como es probado en el Capítulo 2, Teoremas 2.5.7 y 2.5.22, $w \in \mathcal{B}_p^\beta$ si, y solo si, existen $C > 0$ y $0 < \varepsilon < n + p$ tales que, para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$ y $t > 1$, se tiene

$$w(B) \leq Ct^{n+p-\varepsilon} w\left(t^{-1}B\right).$$

Es importante indicar que si dicha condición vale sobre bolas de $\mathcal{F}_\beta$, para algún $\beta \in (0, 1)$, vale también sobre $\mathcal{F}_\alpha$, para cualquier $\alpha \in (0, 1)$. Además, se tiene $A_s^\beta \subset \mathcal{B}_p^\beta$, para todo $s \in [1, 1 + p/n)$.

Teorema 3.1.19. *Sean $T^{\beta,\eta}$, una integral singular β-local, y $w \in RH_q^\beta \cap \mathcal{B}_\delta^\beta$ para algún $q \in (1, \infty)$, donde δ es el exponente de regularidad en* (3.1.9). *Entonces, existe $C > 0$ tal que, para toda $f \in BMO_w^\beta$, se tiene*

$$\left[T^{\beta,\eta} f\right]_{BMO_w^\beta} \leq C[f]_{BMO_w^\beta}.$$

Una acotación análoga a la anterior se tiene sobre LMO^β.

Teorema 3.1.20. *Sean $T^{\beta,\eta}$ integral singular β-local y $0 < \sigma < \min\left\{\frac{\beta}{\sqrt{n}}, \frac{1-\beta}{\sqrt{n}}\right\}$. Entonces, existe $C > 0$ tal que, para toda $f \in LMO^\beta$, se tiene*

$$\left[T^{\beta,\eta} f\right]_{LMO^\beta} \leq C[f]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}}.$$

Finalmente, dados $b \in LMO^\beta$ y $g \in BMO_w^\beta$, se denota

$$T_b^{\beta,\eta} g = bT^{\beta,\eta} g - T^{\beta,\eta}(bg)$$

al conmutador correspondiente de $T^{\beta,\eta}$ y b. Usando los teoremas antes mencionados se obtiene el siguiente.

Teorema 3.1.21. *Sean $T^{\beta,\eta}$ integral singular β-local, $0 < \sigma < \text{mín}\left\{\frac{\beta}{\sqrt{n}}, \frac{1-\beta}{\sqrt{n}}\right\}$ y $w \in A_1^\beta$. Entonces, existe $C > 0$ tal que, para toda $f \in BMO_w^\beta$, se tiene*

$$\left[T_b^{\beta,\eta} f\right]_{BMO_w^\beta} \leq C[b]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}}[f]_{BMO_w^\beta},$$

donde C no depende de b.

Será necesario tener la acotación de arriba para integrales singulares locales con núcleo variable. En ese caso, el núcleo K del operador local definido en (3.1.12) será una función real definida sobre $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$ tal que, para c. t. p. $x \in \mathbb{R}^n$, la función $z \mapsto K(x,z)$ es un núcleo de Calderón-Zygmund. Denotamos

$$S^{\beta,\eta} f(x) = \text{v.p.} \int_\Omega K(x, x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right) f(y)dy \tag{3.1.22}$$

a este tipo de integral singular local.

Teorema 3.1.23. *Sea $S^{\beta,\eta}$ una integral singular local como en (3.1.22), donde además $K(x,\cdot)$ tiene derivaciones parciales hasta el orden $2n$, para c. t. p. $x \in \Omega$. Se supone también que*

$$M_1 = \max_{|\alpha|\leq 2n} \left\|\frac{\partial^\alpha K}{\partial z^\alpha}(x,z)\right\|_{L^\infty(\Omega\times S^{n-1})} < \infty$$

y

$$M_2 = \max_{|\alpha|\leq 2n} \sup_{z\in S^{n-1}} \left[\frac{\partial^\alpha K}{\partial z^\alpha}(\cdot,z)\right]_{LMO^\beta(\Omega)} < \infty.$$

Entonces, existen $C, C' > 0$ tales que, si $b \in LMO^\beta$, $S_b^{\beta,\eta}$ es el conmutador correspondiente, $0 < \sigma < \text{mín}\left\{\frac{\beta}{\sqrt{n}}, \frac{1-\beta}{\sqrt{n}}\right\}$, y $w \in A_1^\beta$, para toda $f \in BMO_w^\beta$, se tienen

$$\left[S^{\beta,\eta} f\right]_{BMO_w^\beta} \leq C[f]_{BMO_w^\beta}$$

y

$$\left[S_b^{\beta,\eta} f\right]_{BMO_w^\beta} \leq C'[b]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}}[f]_{BMO_w^\beta},$$

donde C, C' dependen de M_1 y M_2, y C' es independiente de b.

3.2. Equivalencias de espacios BMO y LMO locales

Para las demostraciones de los Teoremas 3.1.19, 3.1.20 y 3.1.21, será útil tener una desigualdad tipo John-Nirenberg como la dada en [MW76]. Esta se puede obtener aplicando el Teorema 3.2 en [TT16], el cual enunciamos a continuación.

Teorema 3.2.1. *Sean (X,d) un espacio métrico y μ una medida regular de Borel para la cual existe una constante $C>0$ tal que*

$$\mu(B(x,2r)) \leq C\mu(B(x,r)),$$

para todos $x\in X$ y $r>0$. Entonces, dado $w\in A_p(X)$, con $1\leq p<\infty$, tenemos $f\in BMO(X,w)$ si, y solo si, para cada s finito tal que $1<s\leq p'$, hay una constante C_s que satisface

$$\left(w(B)^{-1}\int_B |f-f_B|^s w^{1-s} d\mu\right)^{1/s} \leq C_s,$$

para toda bola B. Más aún, hay una constante $C\geq 1$ (que también depende de s) que verifica

$$C^{-1}[f]_{BMO(X,w)} \leq \sup_B \left(w(B)^{-1}\int_B |f-f_B|^s w^{1-s} d\mu\right)^{1/s} \leq C[f]_{BMO(X,w)}.$$

En el teorema anterior, denotamos por $BMO(X,w)$ al espacio de funciones $f\in L^1_{loc}(X)$ satisfaciendo

$$[f]_{BMO(X,w)} = \sup_{x\in X, r>0} w(B(x,r))^{-1}\int_{B(x,r)} |f-f_{B(x,r)}| d\mu < \infty.$$

Cabe destacar que el caso con $X=\mathbb{R}$, d la distancia euclídea y μ la medida de Lebesgue, fue probado anteriormente en el Teorema 2.2, página 7, en [Mor03].

Ahora, buscamos una versión para pesos en A_p^{loc} del Teorema 3.2.1. Para ello consideramos un entorno con mayor generalidad que $\mathbb{R}^n$. Así, en lo subsecuente, serán (X,d) espacio métrico con la propiedad $\mathcal{P}$ (Definición 2.2.2), Ω abierto propio no-vacío de X, $\beta\in(0,1)$ y μ una medida regular de Borel sobre el espacio métrico inducido $(\Omega, d|_\Omega)$ que duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$.

Lema 3.2.2. *Hay una constante C tal que, para todos $B\in\mathcal{F}_{\beta/3}$, $x\in B$ y $t>0$,*

$$\mu(B(x,2t)\cap B) \leq C\mu(B(x,t)\cap B).$$

En particular, $(B, d|_B, \mu|_B)$ es un espacio de tipo homogéneo.

Demostración. Sea $B\in\mathcal{F}_{\beta/3}$. Por un lado, si r es el radio de B y $t\geq 2r$, para todo $x\in B$ tenemos $B\subset B(x,t)$ y luego

$$\mu(B(x,2t)\cap B) \leq \mu(B) = \mu(B(x,t)\cap B).$$

Por otro lado, debido a la propiedad $\mathcal{P}$, existe $\sigma\in(0,1)$ tal que, si $x\in B$ y $t<2r$, hay un $z\in X$ que verifica

$$B(z,\sigma t)\subset B(x,t)\cap B.$$

Veamos que

$$\mu(B(x,t)) \leq C\mu(B(x,t)\cap B), \tag{3.2.3}$$

con C independiente de x, t y B. Como $B \in \mathcal{F}_{\beta/3}$, por el Lema 2.2.7 en el Capítulo 2, en este caso tenemos

$$t < 2r \leq \frac{2\beta}{3}\rho(\xi) \leq \frac{2\beta}{3-\beta}\rho(x) < \beta\rho(x),$$

donde ξ es el centro de B. Entonces $B(x,t) \in \mathcal{F}_\beta$. Si suponemos $B(z,2t) \in \mathcal{F}_\beta$, hay una constante $C_{\sigma,\beta}$ de duplicación de μ sobre $\mathcal{F}_\beta$ tal que

$$\mu\left(B(x,t)\right) \leq \mu\left(B\left(z,2t\right)\right) \leq C_{\sigma,\beta}\mu\left(B\left(z,\sigma t\right)\right) \leq C_{\sigma,\beta}\mu\left(B(x,t)\cap B\right).$$

Si por el contrario $B\left(z,2t\right) \notin \mathcal{F}_\beta$, tenemos $2t > \beta\rho(z)$ y hay una constante C_β de duplicación de μ sobre las nubes de bolas "grandes"de $\mathcal{F}_\beta$ tal que

$$\begin{aligned}
\mu\left(B(x,t)\right) &\leq \mu\left(\mathcal{N}_\beta\left(B\left(z,\beta\rho\left(z\right)\right)\right)\right) \leq C_\beta\mu\left(B\left(z,\beta\rho\left(z\right)\right)\right) \\
&= C_\beta\mu\left(B\left(z,2\frac{\beta\rho\left(z\right)}{2}\right)\right) \leq C_\beta C_{\sigma,\beta}\mu\left(B\left(z,\sigma\frac{\beta\rho\left(z\right)}{2}\right)\right) \\
&\leq C_\beta C_{\sigma,\beta}\mu\left(B\left(z,\sigma t\right)\right) \leq C_\beta C_{\sigma,\beta}\mu\left(B(x,t)\cap B\right).
\end{aligned}$$

De este modo, obtenemos (3.2.3). Ahora, solo nos queda ver que

$$\mu\left(B(x,2t)\cap B\right) \leq C\mu\left(B(x,t)\right),$$

ya que con esta desigualdad junto con (3.2.3) concluiremos la demostración. En efecto, siendo $C_{\sigma,\beta}$ y C_β las constantes de duplicación anteriores tenemos, cuando $B(x,2t) \in \mathcal{F}_\beta$,

$$\mu\left(B(x,2t)\cap B\right) \leq \mu\left(B\left(x,2t\right)\right) \leq C_{\sigma,\beta}\mu\left(B(x,t)\right)$$

y, cuando $B\left(x,2t\right) \notin \mathcal{F}_\beta$, resulta

$$\begin{aligned}
\mu\left(B(x,2t)\cap B\right) &\leq \mu(B) \leq \mu\left(\mathcal{N}_\beta\left(B\left(x,\beta\rho\left(x\right)\right)\right)\right) \leq C_\beta\mu\left(B\left(x,\beta\rho\left(x\right)\right)\right) \\
&\leq C_\beta C_{\sigma,\beta}\mu\left(B\left(x,\frac{\beta\rho\left(x\right)}{2}\right)\right) \leq C_\beta C_{\sigma,\beta}\mu\left(B(x,t)\right).
\end{aligned}$$

□

Observación 3.2.4. Dado $a \in (0,\beta/80)$, sea $\mathcal{W} = \{P_j\} \subset \mathcal{F}_a - \mathcal{F}_{a/4}$ cubrimiento tipo Whitney para Ω como el dado en [HSV14] (ver Lema 1.0.6), el cual tiene la propiedad de que existe $M = M_{a,\beta} \in \mathbb{N}$ tal que, si $x \in \Omega$,

$$\#\left\{j : P_j \cap \mathcal{N}_\beta\left(B\left(x,\beta\rho\left(x\right)\right)\right) \neq \varnothing\right\} \leq M. \tag{3.2.5}$$

Ahora, sean ν medida de Borel sobre Ω que duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$ y $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\beta/N}$, para algún $N \geq 2$. Denotamos $\mathcal{W}\left(B\right) = \{P \in \mathcal{W} : P \cap \mathcal{N}_\beta\left(B\right) \neq \varnothing\}$. Si $P \in \mathcal{W}\left(B\right)$, existe $B_P \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\beta/5}$ tal que $P \cap B_P \neq \varnothing$ y $B_P \cap B \neq \varnothing$. Entonces, existen $C_{\nu,\beta}$, $C_{\nu,\beta,N}$, $C_{\nu,\beta,a} \geq 1$, independientes de P y B, tales que

$$\begin{aligned}
\nu\left(B\right) &\leq \nu\left(\mathcal{N}_\beta\left(B_P\right)\right) \leq C_{\nu,\beta}\nu\left(B_P\right) \\
&\leq C_{\nu,\beta}\nu\left(\mathcal{N}_\beta\left(P\right)\right) \leq C_{\nu,\beta}C_{\nu,\beta,a}\nu\left(P\right)
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

(observar que esta desigualdad vale para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$) y

$$\begin{aligned}
\nu\left(P\right) &\leq \nu\left(\mathcal{N}_\beta\left(B_P\right)\right) \leq C_{\nu,\beta}\nu\left(B_P\right) \\
&\leq C_{\nu,\beta}\nu\left(\mathcal{N}_\beta\left(B\right)\right) \leq C_{\nu,\beta}C_{\nu,\beta,N}\nu\left(B\right).
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

En virtud del Teorema 3.2.1 y la Observación 3.2.4 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.8. *Sean (X,d) espacio métrico con la propiedad $\mathcal{P}$ (Definición 2.2.2), Ω abierto propio no-vacío de X, $\beta \in (0,1)$ y μ una medida regular de Borel sobre el espacio métrico inducido $(\Omega, d|_\Omega)$ que duplica sobre las bolas de $\mathcal{F}_\beta$. Entonces, dado $w \in A_p^\beta$, con $1 \leq p < \infty$, tenemos $f \in BMO_w^\beta$ si, y solo si, para cada s finito tal que $1 < s \leq p'$, hay una constante $C_{s,\beta}$ que satisface*

$$\left(w(B)^{-1} \int_B |f - f_B|^s w^{1-s} d\mu \right)^{1/s} \leq C_{s,\beta},$$

para toda bola $B \in \mathcal{F}_{\beta/8}$, y

$$\left(w(B)^{-1} \int_B |f|^s w^{1-s} d\mu \right)^{1/s} \leq C_{s,\beta},$$

para toda bola $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\beta/8}$. Más aún, hay una constante $C \geq 1$ (que también depende de s y β) que verifica

$$\begin{aligned} C^{-1}[f]_{BMO_w^\beta} &\leq \sup_{B \in \mathcal{F}_{\beta/8}} \left(w(B)^{-1} \int_B |f - f_B|^s w^{1-s} d\mu \right)^{1/s} \\ &\quad + \sup_{B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\beta/8}} \left(w(B)^{-1} \int_B |f|^s w^{1-s} d\mu \right)^{1/s} \leq C[f]_{BMO_w^\beta}. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $f \in BMO_w^\beta$ con $[f]_{BMO_w^\beta} \leq 1$. Si $B \in \mathcal{F}_{\beta/8}$, por el Lema 3.2.2, $(B, d|_B, \mu|_B)$ es un espacio de tipo homogéneo donde las constantes de duplicación son independientes de B. También, como se vé en la demostración del Teorema 2.2.25, w es un peso $A_p(B)$, o sea, verifica la condición A_p sobre las bolas del espacio métrico inducido en B y, además, la constante de tal condición es independiente de B. Veamos que $f|_B \in BMO(B, w|_B)$. En efecto, sean $x \in B$, $t > 0$ y r el radio de B. Por un lado, si $t \geq 2r$ resulta $B \subset B(x,t)$ y luego

$$\begin{aligned} \int_{B \cap B(x,t)} |f - f_{B \cap B(x,t)}| d\mu &= \int_B |f - f_B| d\mu \\ &\leq w(B) = w(B \cap B(x,t)), \end{aligned}$$

pues $B \in \mathcal{F}_{\beta/8}$. Por otro lado, si $t < 2r$, debido a la propiedad $\mathcal{P}$, existen $\sigma \in (0,1)$ y $z \in X$ (donde σ es independiente de x, t y B) tales que

$$B(z, \sigma t) \subset B \cap B(x,t).$$

Luego, de la misma manera como se demostró (3.2.3), obtenemos

$$w(B(x,t)) \leq C w(B \cap B(x,t)),$$

con C independiente de x, t y B, y $B(x,t) \in \mathcal{F}_{3\beta/8}$. Así resulta

$$\int_{B \cap B(x,t)} |f - f_{B \cap B(x,t)}| d\mu \leq 2 \int_{B \cap B(x,t)} |f - f_{B(x,t)}| d\mu$$

$$\begin{aligned} &\leq 2\int_{B(x,t)} |f - f_{B(x,t)}| d\mu \\ &\leq 2w(B(x,t)) \leq Cw(B \cap B(x,t)). \end{aligned}$$

De este modo, probamos que $f|_B \in BMO(B, w|_B)$. Ahora, aplicando el Teorema 3.2.1 sobre $(B, d|_B, \mu|_B)$ obtenemos

$$\left(w(B)^{-1} \int_B |f - f_B|^s w^{1-s} d\mu \right)^{1/s} \leq C_{s,\beta},$$

donde $C_{s,\beta}$ no depende de B o f. Reemplazando f por $f/[f]_{BMO_w^\beta}$ en la desigualdad de arriba, conseguimos

$$\left(w(B)^{-1} \int_B |f - f_B|^s w^{1-s} d\mu \right)^{1/s} \leq C_{s,\beta} [f]_{BMO_w^\beta}, \tag{3.2.9}$$

para toda $B \in \mathcal{F}_{\beta/8}$, donde $C_{s,\beta}$ no depende de B o f. Ahora tomamos $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\beta/8}$ y $\mathcal{W} \subset \mathcal{F}_{\beta/85} - \mathcal{F}_{\beta/340}$ cubrimiento tipo Whitney para Ω como el dado en la Observación 3.2.4. Entonces, por (3.2.9), (3.2.7), y (3.2.5), tenemos

$$\begin{aligned} \left(\int_B |f|^s w^{1-s} d\mu \right)^{1/s} &\leq \sum_{P \in \mathcal{W}: P \cap B \neq \varnothing} \left(\int_P |f|^s w^{1-s} d\mu \right)^{1/s} \\ &\leq \sum_{P \in \mathcal{W}: P \cap B \neq \varnothing} \left(\int_P |f - f_P|^s w^{1-s} d\mu \right)^{1/s} \\ &\quad + \sum_{P \in \mathcal{W}: P \cap B \neq \varnothing} |f_P| \left(\int_P w^{1-s} d\mu \right)^{1/s} \\ &\leq C \sum_{P \in \mathcal{W}: P \cap B \neq \varnothing} w(P)^{1/s} [f]_{BMO_w^\beta} \\ &\quad + \sum_{P \in \mathcal{W}: P \cap B \neq \varnothing} \frac{w(P)}{\mu(P)} \left(\int_P w^{(1-s')^{-1}} d\mu \right)^{(s'-1)/s'} [f]_{BMO_w^\beta} \\ &\leq C \sum_{P \in \mathcal{W}: P \cap B \neq \varnothing} \left(w(P)^{1/s} + \frac{w(P)}{\mu(P)} \frac{\mu(P)}{w(P)^{1/s'}} \right) [f]_{BMO_w^\beta} \\ &\leq CM\ w(B)^{1/s} [f]_{BMO_w^\beta}, \end{aligned}$$

donde además consideramos la Observación 3.1.2 y que $w \in A_{s'}^\beta$, ya que $p \leq s'$. Por último, las estimaciones recíprocas surgen fácilmente al obtener, aplicando la desigualdad de Hölder,

$$w(B)^{-1} \int_B |f - f_B| d\mu \leq \left(w(B)^{-1} \int_B |f - f_B|^s w^{1-s} d\mu \right)^{1/s}$$

y

$$w(B)^{-1} \int_B |f| d\mu \leq \left(w(B)^{-1} \int_B |f|^s w^{1-s} d\mu \right)^{1/s},$$

para toda bola $B \subset \Omega$ y todo $s \in (1, \infty)$ (en este caso, no se hace uso de ninguna condición sobre el peso w). Esto completa la demostración. □

Para el siguiente lema daremos algunas notaciones. Sea $Q = Q(\xi, l)$ el cubo en $\mathbb{R}^n$ de centro ξ cuyas aristas tienen longitud l y son paralelas a los ejes coordenados. Dado $k \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{D}_Q^k$ a la familia de subcubos diádicos de Q de nivel k, o sea, la familia de cubos que se obtienen de Q dividiendo cada una de sus aristas en segmentos de longitud $l/2^k$. Para un k fijo, definimos

$$\mathcal{M}_{Q,k}f(x) = \sup_{x\in I\in\mathcal{D}_Q^j,\, j\geq k} |I|^{-1}\int_I |f(y)|dy, \tag{3.2.10}$$

para cada $x \in \Omega$ y $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Observación 3.2.11. Para los siguientes resultados es importante notar que en el contexto euclídeo, si $w \in RH_s^\beta$ entonces w es un peso duplicante sobre la familia $\mathcal{F}_\beta$. En efecto, sean $B \in \mathcal{F}_\beta$ y $E \subset B$ medible. Por la desigualdad de Hölder tenemos

$$w(E) = \int_B w\chi_E\, dx \leq \left(\int_B w^s dx\right)^{1/s} |E|^{1/s'} \leq Cw(B)\left(\frac{|E|}{|B|}\right)^{1/s'},$$

donde se puede suponer $C > 1$. Luego, dado $\varepsilon \in (0, 1)$, existe $\alpha = (\varepsilon/C)^{s'} \in (0, 1)$ tal que, si $|E| \leq \alpha|B|$ se tiene

$$\frac{w(E)}{w(B)} \leq C\alpha^{1/s'} = \varepsilon.$$

De este modo, w es comparable a la medida de Lebesgue sobre $\mathcal{F}_\beta$. Por lo tanto, como se ve en la demostración de que (ii) implica (i) del Teorema 2.4.9, tenemos que w duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$.

Ahora, para demostrar el siguiente lema, seguimos las ideas dadas en [FPW98].

Lema 3.2.12. *Sean $1 < s < \infty$, $0 < \beta < 1$, $w \in RH_s^\beta$ y $f \in BMO_w^\beta$ con $[f]_{BMO_w^\beta} = 1$. Entonces, dada $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_{\beta/(2\sqrt{n})}$, si denotamos $Q = Q(\xi, 2r)$, existen $k_\beta \in \mathbb{N}$ y constantes positivas C_1, C_2 y C tales que*

$$\begin{aligned} \left|\left\{x \in Q : \mathcal{M}_{Q,k_\beta}(f - f_Q)(x) > N\lambda\right\}\right| \;&\leq\; \frac{\varepsilon C C_2}{N - C_1}\left|\left\{x \in Q : \mathcal{M}_{Q,k_\beta}(f - f_Q)(x) > \lambda\right\}\right| \\ &\quad + \frac{C}{(\lambda\varepsilon)^s}\left(\frac{w(B)}{|B|}\right)^s |B|, \end{aligned}$$

para todos $\lambda \geq C_2\frac{w(Q)}{|Q|}$, $N > C_1$ y $\varepsilon > 0$, donde C_1, C_2 y C no dependen de B o f.

Demostración. Denotemos $l = 2r$ y sea $I = Q(x, l/2^k) \in \mathcal{D}_Q^k$. En particular, tenemos $B \subset Q \subset \sqrt{n}B$, con $\sqrt{n}B \in \mathcal{F}_{\beta/2}$. Entonces $I \subset B_{\beta/2}(\xi)$ y, por el Lema 2.2.7, resulta

$$\frac{\sqrt{n}l/2^k}{2} = \frac{\sqrt{n}r}{2^k} \leq \frac{(\beta/2)\rho(\xi)}{2^k} \leq \frac{(\beta/2)\rho(x)}{2^k(1-\beta/2)}.$$

Así, tomando $k_\beta = 1 + \left[\log_2 \frac{1}{1-\beta/2}\right]$ tenemos $B(x, \sqrt{n}l/2^{k+1}) \in \mathcal{F}_{\beta/2}$, para todo $k \geq k_\beta$, o sea, para cada $I \in \mathcal{D}_Q^k$, con $k \geq k_\beta$, la bola circunscripta en I está en $\mathcal{F}_{\beta/2}$. Ahora, para cada $I \in \bigcup_{k \geq k_\beta} \mathcal{D}_Q^k \cup \{Q\}$, denotemos ξ_I al centro de I y $B_I = B(\xi_I, r_I)$, siendo $r_I = r/2^k$ si $I \in \mathcal{D}_Q^k$ (notar que, en particular, $\xi_Q = \xi$ y $r_Q = r$). Como $f \in BMO_w^\beta$ con $[f]_{BMO_w^\beta} = 1$, $B_I \subset I \subset \sqrt{n}B_I$ y w duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$ (ver Observación 3.2.11), vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|I|}\int_I |f - f_I|dy &\leq \frac{2}{|I|}\int_I |f - f_{\sqrt{n}B_I}|dy \\
&\leq \frac{2^{1-n}n^{n/2}|B(0,1)|}{|\sqrt{n}B_I|}\int_{\sqrt{n}B_I} |f - f_{\sqrt{n}B_I}|dy \\
&\leq 2^{1-n}n^{n/2}|B(0,1)|C\frac{w(I)}{|I|}, \qquad (3.2.13)
\end{aligned}$$

para cada $I \in \bigcup_{k \geq k_\beta} \mathcal{D}_Q^k \cup \{Q\}$. Por lo tanto, escogemos $C_2 = 2^{1-n}n^{n/2}|B(0,1)|C$ y, dado $\lambda \geq C_2\frac{w(Q)}{|Q|}$, consideremos una descomposición de Q tipo Calderón-Zygmund en cubos de $\mathcal{D}_Q^k$, con $k \geq k_\beta$. Denotemos ésta por $\left\{Q_j^k\right\}_{j,k \geq k_\beta}$, donde para cada j y $k \geq k_\beta$, $Q_j^k \in \mathcal{D}_Q^k$ y es escogido de modo que

$$\lambda < |Q_j^k|^{-1}\int_{Q_j^k} |f(y) - f_Q|dy \qquad (3.2.14)$$

y, cuando $k > k_\beta$,

$$|I|^{-1}\int_I |f(y) - f_Q|dy \leq \lambda \qquad (3.2.15)$$

para cada $I \in \mathcal{D}_Q^i$, con $k_\beta \leq i \leq k-1$, tal que $Q_j^k \subset I$, y cuando $k = k_\beta$ tenemos

$$|Q|^{-1}\int_Q |f(y) - f_Q|dy \leq \lambda, \qquad (3.2.16)$$

debido a (3.2.13). Más aún, de (3.2.15) y (3.2.16), se deduce

$$|Q_j^k|^{-1}\int_{Q_j^k} |f(y) - f_Q|dy \leq 2^{n(k_\beta+1)}\lambda. \qquad (3.2.17)$$

Sea $C_1 = 2^{n(k_\beta+1)}$. Dado $t > 0$, denotemos

$$E_t(Q) = \left\{x \in Q : \mathcal{M}_{Q,k_\beta}(f - f_Q)(x) > t\right\}.$$

Entonces, es claro que

$$E_\lambda(Q) = \bigcup_{j,k \geq k_\beta} Q_j^k$$

y, como $E_{N\lambda}(Q) \subset E_\lambda(Q)$ para $N > C_1$, resulta

$$|E_{N\lambda}(Q)| \leq \sum_{j,k}\left|\left\{x \in Q_j^k : \mathcal{M}_{Q,k_\beta}(f - f_Q)(x) > N\lambda\right\}\right|. \qquad (3.2.18)$$

Ahora, fijemos Q_j^k y $x \in Q_j^k$ tal que $\mathcal{M}_{Q,k_\beta}(f - f_Q)(x) > N\lambda$. Entonces, hay un $I \in \mathcal{D}_Q^k$, con $k \geq k_\beta$, $x \in I$ y

$$|I|^{-1} \int_I |f(y) - f_Q| dy > N\lambda.$$

Si $k = k_\beta$, por la definifción de $\mathcal{M}_{Q,k_\beta}$ (ver (3.2.10)), tenemos $I \subset Q_j^k$. Cuando $k > k_\beta$, (3.2.15) y la desigualdad de arriba implican que $I \subset Q_j^k$. Por lo tanto, si denotamos por $\mathcal{M}$ al operador maximal de Hardy-Littlewood sobre cubos, obtenemos

$$\begin{aligned}
N\lambda &< |I|^{-1} \int_I |f(y) - f_Q| dy = |I|^{-1} \int_I |f(y) - f_Q| \chi_{Q_j^k}(y) dy \\
&\leq |I|^{-1} \int_I |f(y) - f_{Q_j^k}| \chi_{Q_j^k}(y) dy + |f_{Q_j^k} - f_Q| \\
&\leq \mathcal{M}\left(\left(f - f_{Q_j^k}\right) \chi_{Q_j^k}\right)(x) + |Q_j^k|^{-1} \int_{Q_j^k} |f(y) - f_Q| dy \\
&\leq \mathcal{M}\left(\left(f - f_{Q_j^k}\right) \chi_{Q_j^k}\right)(x) + 2^{n(k_\beta+1)}\lambda,
\end{aligned}$$

por (3.2.17). De este modo, volviendo a (3.2.18) conseguimos

$$|E_{N\lambda}(Q)| \leq \sum_{j,k} \left|\left\{x \in Q_j^k : \mathcal{M}\left(\left(f - f_{Q_j^k}\right) \chi_{Q_j^k}\right)(x) > (N - C_1)\lambda\right\}\right|.$$

Ahora, denotemos

$$J = \left\{j, k : \varepsilon\lambda \frac{|Q_j^k|}{w\left(Q_j^k\right)} > 1\right\}.$$

Entonces, $|E_{N\lambda}(Q)|$ se estima con la suma de

$$\sum_{j,k \in J} \left|\left\{x \in Q_j^k : \mathcal{M}\left(\left(f - f_{Q_j^k}\right) \chi_{Q_j^k}\right)(x) > (N - C_1)\lambda\right\}\right| \tag{3.2.19}$$

y

$$\sum_{j,k \notin J} \left|\left\{x \in Q_j^k : \mathcal{M}\left(\left(f - f_{Q_j^k}\right) \chi_{Q_j^k}\right)(x) > (N - C_1)\lambda\right\}\right|. \tag{3.2.20}$$

Por un lado, debido a que $\mathcal{M}$ es de tipo débil (1,1) y considerando (3.2.13), (3.2.19) se estima con

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k \in J} \frac{C}{(N - C_1)\lambda} \int_{Q_j^k} \left|f - f_{Q_j^k}\right| dy &\leq \frac{CC_2}{(N - C_1)\lambda} \sum_{j,k \in J} w\left(Q_j^k\right) \\
&\leq \frac{CC_2\varepsilon\lambda}{(N - C_1)\lambda} \sum_{j,k \in J} |Q_j^k| \\
&\leq \frac{CC_2\varepsilon}{N - C_1} |E_\lambda(Q)|. \qquad (3.2.21)
\end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando la desigualdad de Hölder y teniendo en cuenta que $w \in RH_s^\beta$ y la Observación 3.2.11, (3.2.20) se estima con

$$\sum_{j,k \notin J} |Q_j^k| \leq \sum_{j,k \notin J} |Q_j^k| \left(\frac{w\left(Q_j^k\right)}{\varepsilon\lambda\left|Q_j^k\right|}\right)^s$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C}{(\varepsilon\lambda)^s}\sum_{j,k}\left|Q_j^k\right|^{1-s} w\left(B_{Q_j^k}\right)^s \\
&\leq \frac{C}{(\varepsilon\lambda)^s}\sum_{j,k}\left|Q_j^k\right|^{1-s} \int_{B_{Q_j^k}} w^s dx \left|Q_j^k\right|^{s/s'} \\
&\leq \frac{C}{(\varepsilon\lambda)^s}\int_Q w^s dx \leq \frac{C}{(\varepsilon\lambda)^s}\left|\sqrt{n}B\right|\left(\frac{w\left(\sqrt{n}B\right)}{\left|\sqrt{n}B\right|}\right)^s \\
&\leq \frac{C}{(\varepsilon\lambda)^s}\left|B\right|\left(\frac{w\left(B\right)}{\left|B\right|}\right)^s. \qquad (3.2.22)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de (3.2.21) y (3.2.22) se concluye la demostración. □

Lema 3.2.23. *Sean $0 < \alpha < \beta < 1$ y w un peso que duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$. Entonces, $BMO_w^\alpha = BMO_w^\beta$ y hay una constante $C_{\alpha,\beta} \geq 1$ tal que*

$$C_{\alpha,\beta}^{-1}\,[f]_{BMO_w^\alpha} \leq [f]_{BMO_w^\beta} \leq C_{\alpha,\beta}\,[f]_{BMO_w^\alpha}\,.$$

Además, si $w \in RH_q^\beta$ con $1 < q < \infty$ y $s \in (1,q)$, $BMO_w^\beta = BMO_{w,s}^\beta$ y hay una constante $C_{\beta,s} \geq 1$ tal que

$$[f]_{BMO_w^\beta} \leq [f]_{BMO_{w,s}^\beta} \leq C_{\beta,s}\,[f]_{BMO_w^\beta}\ .$$

Demostración. Probemos la primera desigualdad. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\beta}{2^N} \leq \alpha < \frac{\beta}{2^{N-1}}.$$

Por un lado, como $\mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}_\beta$, es trivial que

$$w(B)^{-1}\int_B |f - f_B|d\mu \leq [f]_{BMO_w^\beta},$$

para cada $B \in \mathcal{F}_{\alpha/2}$. Por otro lado, si $B \in \mathcal{F}_\alpha - \mathcal{F}_{\alpha/2}$ entonces $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\beta/2^{N+1}}$, por lo cual, debido a la Observación 3.1.2, tenemos

$$w(B)^{-1}\int_B |f|d\mu \leq C_N[f]_{BMO_w^\beta},$$

con C_N independiente de B y f. De este modo, conseguimos

$$[f]_{BMO_w^\alpha} \leq C_N\,[f]_{BMO_w^\beta}\,.$$

Sea ahora $B \in \mathcal{F}_{\beta/2^{N+1}}$. Entonces, $B \in \mathcal{F}_{\alpha/2}$, por lo cual

$$w(B)^{-1}\int_B |f - f_B|d\mu \leq [f]_{BMO_w^\alpha}.$$

Si $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\beta/2^{N+1}}$, consideramos el cubrimiento tipo Whitney $\mathcal{W}$ para $a = \alpha/85$, dado por la Observación 3.2.4. Así, por (3.2.7), (3.2.5), y la Observación 3.1.2, resulta

$$\int_B |f|d\mu \ \leq \ \sum_{P\in\mathcal{W}:P\cap B\neq\varnothing}\int_P |f|d\mu$$

$$\begin{aligned} &\leq C \sum_{P\in\mathcal{W}:P\cap B\neq\varnothing} w(P)[f]_{BMO_w^\alpha} \\ &\leq CM\; w(B)[f]_{BMO_w^\alpha}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, conseguimos

$$[f]_{BMO_w^\beta} \leq C_{\alpha,\beta}\,[f]_{BMO_w^\alpha}\,,$$

considerando nuevamente la Observación 3.1.2.

Ahora, sean $w \in RH_q^\beta$, $s \in (1,q)$, $f \in BMO_w^\beta$ con $[f]_{BMO_w^\beta} = 1$, $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_{\beta/(2\sqrt{n})}$ y $Q = Q(\xi, 2r)$. Con la notación usada en el Lema 3.2.12, notemos que

$$\begin{aligned} s\int_0^\infty t^{s-1}\,|E_t(Q)|\,dt &= s\int_0^{NC_2\frac{w(Q)}{|Q|}} t^{s-1}\,|E_t(Q)|\,dt \\ &\quad + s\int_{NC_2\frac{w(Q)}{|Q|}}^\infty t^{s-1}\,|E_t(Q)|\,dt \\ &\leq |Q|\,(NC_2)^s\left(\frac{w(Q)}{|Q|}\right)^s \\ &\quad + sN^s\int_{C_2\frac{w(Q)}{|Q|}}^\infty \lambda^{s-1}\,|E_{N\lambda}(Q)|\,d\lambda. \end{aligned}$$

Luego, aplicando el Lema 3.2.12 con q en vez de s y $N = 2C_1$, la integral del último término de arriba se estima como

$$\begin{aligned} \int_{C_2\frac{w(Q)}{|Q|}}^\infty \lambda^{s-1}\,|E_{N\lambda}(Q)|\,d\lambda &\leq \varepsilon C\int_{C_2\frac{w(Q)}{|Q|}}^\infty \lambda^{s-1}\,|E_\lambda(Q)|\,d\lambda \\ &\quad + Cr^n\left(\frac{w(Q)}{|Q|}\right)^q\int_{C_2\frac{w(Q)}{|Q|}}^\infty \frac{\lambda^{s-1}}{(\lambda\varepsilon)^q}d\lambda \\ &\leq \varepsilon C\int_0^\infty \lambda^{s-1}\,|E_\lambda(Q)|\,d\lambda \\ &\quad + \frac{C\varepsilon^{-q}r^n}{q-s}\left(\frac{w(Q)}{|Q|}\right)^q\left(C_2\frac{w(Q)}{|Q|}\right)^{s-q}. \end{aligned}$$

De este modo, tomando $\varepsilon = (2CN^s)^{-1}$ podemos obtener

$$s\int_0^\infty t^{s-1}\,|E_t(Q)|\,dt \leq C|B|\left(\frac{w(B)}{|B|}\right)^s.$$

Ahora, notamos que, por Teorema de diferenciación de Lebesgue, para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$f(x) - f_Q \leq \mathcal{M}_{Q,k}(f - f_Q)(x),$$

c. t. p. $x \in Q$. Por lo tanto

$$\left(\int_B |f(x) - f_B|^s dx\right)^{1/s} \leq 2\left(\int_Q |f(x) - f_Q|^s dx\right)^{1/s}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2\left(\int_Q \mathcal{M}_{Q,k_\beta}\left(f-f_Q\right)(x)^s dx\right)^{1/s} \\
&= 2\left(s\int_0^\infty t^{s-1}\left|E_t(Q)\right| dt\right)^{1/s} \\
&\leq C|B|^{1/s}\frac{w(B)}{|B|},
\end{aligned}
$$

con C independiente de B y f. De este modo hemos probado que

$$
\frac{|B|}{w(B)}\left(|B|^{-1}\int_B |f(x)-f_B|^s dx\right)^{1/s} \leq C \tag{3.2.24}
$$

para $B \in \mathcal{F}_{\beta/(2\sqrt{n})}$. Ahora tomamos $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\beta/(2\sqrt{n})}$ y $\mathcal{W} \subset \mathcal{F}_{\beta/(85\sqrt{n})} - \mathcal{F}_{\beta/(340\sqrt{n})}$ cubrimiento tipo Whitney como el dado en la Observación 3.2.4. Entonces, por (3.2.24), (3.2.7), (3.2.6) y (3.2.5) tenemos

$$
\begin{aligned}
\left(\int_B |f|^s dx\right)^{1/s} &\leq \sum_{P\in\mathcal{W}:P\cap B\neq\varnothing}\left(\int_P |f|^s dx\right)^{1/s} \\
&\leq \sum_{P\in\mathcal{W}:P\cap B\neq\varnothing}\left(\int_P |f-f_P|^s dx\right)^{1/s} \\
&\quad + \sum_{P\in\mathcal{W}:P\cap B\neq\varnothing}|f_P||P|^{1/s} \\
&\leq C\left(\sum_{P\in\mathcal{W}:P\cap B\neq\varnothing}\frac{w(P)}{|P|}|P|^{1/s}\right)\left([f]_{BMO^\beta_{w,s}}+[f]_{BMO^\beta_w}\right) \\
&\leq CM\frac{w(B)}{|B|}|B|^{1/s}[f]_{BMO^\beta_w},
\end{aligned}
$$

donde además consideramos la Observación 3.1.2. Entonces, para f arbitraria y no nula en c. t. p. de Ω, tomando $f = f/[f]_{BMO^\beta_w}$ en esta última desigualdad y (3.2.24) probamos que

$$
[f]_{BMO^\beta_{w,s}} \leq C_{\beta,s}\,[f]_{BMO^\beta_w} .
$$

Por último, aplicando la desigualdad de Hölder, se obtiene fácilmente

$$
[f]_{BMO^\beta_w} \leq [f]_{BMO^\beta_{w,s}} ,
$$

para cada $s \in (1,\infty)$. Esto finaliza la prueba. □

El siguiente lema será útil para demostrar el Teorema 3.1.20.

Lema 3.2.25. *Para todos $\alpha, \beta \in (0,1)$ y $q \in [1,\infty)$, tenemos $LMO^\alpha_q = LMO^\beta_q$ y, si $s > 1$, $LMO^\beta = LMO^\beta_s$. Más aún, hay una constante $C_{\beta,s} \geq 1$ tal que*

$$
[f]_{LMO^{\beta/\sqrt{n}}_s} \leq C_{\beta,s}\,[f]_{LMO^\beta} .
$$

La demostración de este lema sigue los pasos de la del Lema 3.2.23. Antes de su prueba consideraremos los dos siguientes lemas.

Lema 3.2.26. *Sean $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_\beta$, $N \geq 1$, y $\{B_j = B(\xi_j, r_j)\}$ familia disjunta tal que $B_j \subset B$, para cada j, y $NB_j \in \mathcal{F}_\beta$. Entonces*

$$\sum_j \left(1 + \log \frac{\beta\rho(\xi_j)}{Nr_j}\right)^{-s} (Nr_j)^n \leq C \left(1 + \log \frac{\beta\rho(\xi)}{r}\right)^{-s} r^n,$$

para cada $s > 0$, con C independiente de B y $\{B_j\}$.

Demostración. Como $r_j \leq r$, tenemos

$$\begin{aligned}
1 + \log \frac{\beta\rho(\xi)}{r} &\leq 1 + \log \frac{\beta\rho(\xi)}{Nr_j} + \log N \\
&\leq (1 + \log N) \left(1 + \log \frac{\beta(1-\beta)^{-1}\rho(\xi_j)}{Nr_j}\right) \\
&\leq (1 + \log N) \left(1 + \log \frac{1}{1-\beta}\right) \left(1 + \log \frac{\beta\rho(\xi_j)}{Nr_j}\right),
\end{aligned}$$

donde además aplicamos el Lema 2.2.7. Entonces, resulta

$$\begin{aligned}
\sum_j \left(1 + \log \frac{\beta\rho(\xi_j)}{Nr_j}\right)^{-s} (Nr_j)^n &\leq C \left(1 + \log \frac{\beta\rho(\xi)}{r}\right)^{-s} \sum_j |B_j| \\
&\leq C \left(1 + \log \frac{\beta\rho(\xi)}{r}\right)^{-s} |\cup B_j| \\
&\leq C \left(1 + \log \frac{\beta\rho(\xi)}{r}\right)^{-s} r^n,
\end{aligned}$$

donde C depende de n, N, s y β. □

Lema 3.2.27. *Sean $0 < s < \infty$, $0 < \beta < 1$ y $f \in LMO^\beta$ con $[f]_{LMO^\beta} = 1$. Entonces, dada $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_{\beta/\sqrt{n}}$, si denotamos $Q = Q(\xi, 2r)$, existen $k_\beta \in \mathbb{N}$ y constantes positivas C_1, C_2 y C tales que*

$$\begin{aligned}
\left|\left\{x \in Q : \mathcal{M}_{Q,k_\beta}(f - f_Q)(x) > N\lambda\right\}\right| &\leq \frac{\varepsilon C C_2}{N - C_1} \left|\left\{x \in Q : \mathcal{M}_{Q,k_\beta}(f - f_Q)(x) > \lambda\right\}\right| \\
&\quad + \frac{C}{(\lambda\varepsilon)^s} \left(1 + \log \frac{\beta\rho(\xi)}{\sqrt{n}r}\right)^{-s} r^n,
\end{aligned}$$

para todos $\lambda \geq C_2 \left(1 + \log \frac{\beta\rho(\xi)}{\sqrt{n}r}\right)^{-1}$, $N > C_1$ y $\varepsilon > 0$, donde C_1, C_2 y C no dependen de B o f.

Demostración. La demostración de este lema es idéntica a la del Lema 3.2.12. Denotemos $l = 2r$ y sea $I = Q(x, l/2^k) \in \mathcal{D}_Q^k$. Entonces, como en la demostración del Lema 3.2.12 con

$\beta/\sqrt{n}$ en lugar de $\beta/(2\sqrt{n})$, tomando $k_\beta = 1 + \left[\log_2 \frac{1}{1-\beta}\right]$ tenemos $B(x, \sqrt{n}l/2^{k+1}) \in \mathcal{F}_\beta$, para todo $k \geq k_\beta$, o sea, para cada $I \in \mathcal{D}_Q^k$, con $k \geq k_\beta$, la bola circunscripta en I está en $\mathcal{F}_\beta$. Ahora, para cada $I \in \bigcup_{k \geq k_\beta} \mathcal{D}_Q^k \cup \{Q\}$, denotemos ξ_I al centro de I y $B_I = B(\xi_I, r_I)$, siendo $r_I = r/2^k$ si $I \in \mathcal{D}_Q^k$ (notar que, en particular, $\xi_Q = \xi$ y $r_Q = r$). Como $f \in LMO^\beta$, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|}\int_I |f - f_I| dy &\leq \frac{2}{|I|}\int_I |f - f_{\sqrt{n}B_I}| dy \\ &\leq \frac{2^{1-n}n^{n/2}|B(0,1)|}{|\sqrt{n}B_I|}\int_{\sqrt{n}B_I} |f - f_{\sqrt{n}B_I}| dy \\ &\leq 2^{1-n}n^{n/2}|B(0,1)| \left(1 + \log \frac{\beta\rho(\xi_I)}{\sqrt{n}r_I}\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{3.2.28}$$

para cada $I \in \bigcup_{k \geq k_\beta} \mathcal{D}_Q^k \cup \{Q\}$. Por lo tanto, escogemos $C_2 = 2^{1-n}n^{n/2}|B(0,1)|$ y, dado $\lambda \geq C_2 \left(1 + \log \frac{\beta\rho(\xi)}{\sqrt{n}r}\right)^{-1}$, consideremos una descomposición de Q tipo Calderón-Zygmund en cubos de $\mathcal{D}_Q^k$, con $k \geq k_\beta$. Denotemos a ésta por $\left\{Q_j^k\right\}_{j,k \geq k_\beta}$ y, dado $t > 0$, sea

$$E_t(Q) = \left\{x \in Q : \mathcal{M}_{Q,k_\beta}(f - f_Q)(x) > t\right\}.$$

Entonces, para $N > C_1 = 2^{n(k_\beta+1)}$, siguiendo la demostración del Lema 3.2.12 conseguimos

$$|E_{N\lambda}(Q)| \leq \sum_{j,k} \left|\left\{x \in Q_j^k : \mathcal{M}\left(\left(f - f_{Q_j^k}\right)\chi_{Q_j^k}\right)(x) > (N - C_1)\lambda\right\}\right|.$$

Ahora, sea

$$J = \left\{ j, k : \varepsilon\lambda \left(1 + \log \frac{\beta\rho\left(\xi_{Q_j^k}\right)}{\sqrt{n}r_{Q_j^k}}\right) > 1 \right\}.$$

Entonces, $|E_{N\lambda}(Q)|$ se estima con la suma de

$$\sum_{j,k \in J} \left|\left\{x \in Q_j^k : \mathcal{M}\left(\left(f - f_{Q_j^k}\right)\chi_{Q_j^k}\right)(x) > (N - C_1)\lambda\right\}\right| \tag{3.2.29}$$

y

$$\sum_{j,k \notin J} \left|\left\{x \in Q_j^k : \mathcal{M}\left(\left(f - f_{Q_j^k}\right)\chi_{Q_j^k}\right)(x) > (N - C_1)\lambda\right\}\right|. \tag{3.2.30}$$

Por un lado, debido a que $\mathcal{M}$ es de tipo débil (1,1) y considerando (3.2.28), (3.2.29) se estima con

$$\begin{aligned} \sum_{j,k \in J} \frac{C}{(N - C_1)\lambda}\int_{Q_j^k} \left|f - f_{Q_j^k}\right| dy &\leq \frac{CC_2}{(N - C_1)\lambda}\sum_{j,k \in J} \frac{\left|Q_j^k\right|}{1 + \log \frac{\beta\rho\left(\xi_{Q_j^k}\right)}{\sqrt{n}r_{Q_j^k}}} \\ &\leq \frac{CC_2\varepsilon\lambda}{(N - C_1)\lambda}\sum_{j,k \in J} \left|Q_j^k\right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{CC_2\varepsilon}{N-C_1}\left|E_\lambda(Q)\right|. \tag{3.2.31}$$

Por otro lado, considerando el Lema 3.2.26, (3.2.30) se estima con

$$\begin{aligned}\sum_{j,k\notin J}\left|Q_j^k\right| &\leq \frac{2^n n^{-n/2}}{(\varepsilon\lambda)^s}\sum_{j,k\notin J}\left(\sqrt{n}r_{Q_j^k}\right)^n\left(1+\log\frac{\beta\rho\left(\xi_{Q_j^k}\right)}{\sqrt{n}r_{Q_j^k}}\right)^{-s}\\ &\leq \frac{C}{(\varepsilon\lambda)^s}\left(1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{\sqrt{n}r}\right)^{-s}r^n. \qquad (3.2.32)\end{aligned}$$

Por lo tanto, de (3.2.31) y (3.2.32) se concluye la demostración. □

Demostración del Lema 3.2.25. Primero veamos que, dados $q \geq 1$ y $0 < \alpha < \beta < 1$, entonces $LMO_q^\beta = LMO_q^\alpha$. Como $\mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}_\beta$, claramente $[f]_{LMO_q^\alpha} \leq [f]_{LMO_q^\beta}$, para cada $f \in LMO_q^\beta$. Consideremos ahora $f \in LMO_q^\alpha$ y $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_\beta$. Por un lado, si $B \in \mathcal{F}_\alpha$ resulta

$$\begin{aligned}&\left(1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{r}\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f-f_B|^q dx\right)^{1/q}\\ \leq &\left(1+\log\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(1+\log\frac{\alpha\rho(\xi)}{r}\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f-f_B|^q dx\right)^{1/q} \leq \left(1+\log\frac{\beta}{\alpha}\right)[f]_{LMO_q^\alpha}.\end{aligned}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta el Lema 3.2.23 y la Observación 3.1.2, si $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_\alpha$ tenemos

$$\begin{aligned}\left(1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{r}\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f-f_B|^q dx\right)^{1/q} &\leq \left(1+\log\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f-f_B|^q dx\right)^{1/q}\\ &\leq \left(1+\log\frac{\beta}{\alpha}\right)C_{\alpha,\beta,q}[f]_{BMO_q^\beta}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos

$$[f]_{LMO_q^\beta} \leq \left(1+\log\frac{\beta}{\alpha}\right)C_{\alpha,\beta,q}\,\text{máx}\left\{[f]_{LMO_q^\alpha}, [f]_{BMO_q^\beta}\right\}.$$

De este modo, resulta $f \in LMO_q^\beta$.

Ahora, sean $s > 1$, $f \in LMO^\beta$ con $[f]_{LMO^\beta} = 1$, $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_{\beta/\sqrt{n}}$ y $Q = Q(\xi, 2r)$. Con la notación usada en el Lema 3.2.27, resulta

$$\begin{aligned}s\int_0^\infty t^{s-1}\left|E_t(Q)\right|dt &= s\int_0^{NC_2\left(1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{\sqrt{n}r}\right)^{-1}} t^{s-1}\left|E_t(Q)\right|dt\\ &\quad+s\int_{NC_2\left(1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{\sqrt{n}r}\right)^{-1}}^\infty t^{s-1}\left|E_t(Q)\right|dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\le |Q|\,(NC_2)^s \left(1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{\sqrt{n}r}\right)^{-s} \\ &\quad + sN^s \int_{C_2\left(1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{\sqrt{n}r}\right)^{-1}}^{\infty} \lambda^{s-1}\,|E_{N\lambda}(Q)|\,d\lambda. \end{aligned} \tag{3.2.33}$$

Luego, aplicando el Lema 3.2.27 con $2s$ en vez de s y $N = 2C_1$, la integral del último término de (3.2.33) se puede estimar como

$$\begin{aligned} \int_{C_2\left(1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{\sqrt{n}r}\right)^{-1}}^{\infty} \lambda^{s-1}\,|E_{N\lambda}(Q)|\,d\lambda &\le \varepsilon C \int_{C_2\left(1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{\sqrt{n}r}\right)^{-1}}^{\infty} \lambda^{s-1}\,|E_{\lambda}(Q)|\,d\lambda \\ &\quad + \frac{Cr^n}{\left(1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{\sqrt{n}r}\right)^{2s}} \int_{C_2\left(1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{\sqrt{n}r}\right)^{-1}}^{\infty} \frac{\lambda^{s-1}}{(\lambda\varepsilon)^{2s}}d\lambda \\ &\le \varepsilon C \int_0^{\infty} \lambda^{s-1}\,|E_{\lambda}(Q)|\,d\lambda \\ &\quad + \frac{C\varepsilon^{-2s}s^{-1}C_2^{-s}r^n}{\left(1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{\sqrt{n}r}\right)^{2s}} \left(1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{\sqrt{n}r}\right)^{s}. \end{aligned}$$

De este modo, tomando $\varepsilon = (2CN^s)^{-1}$ de (3.2.33) obtenemos

$$s\int_0^{\infty} t^{s-1}\,|E_t(Q)|\,dt \le C|B| \left(1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{\sqrt{n}r}\right)^{-s}.$$

Ahora, notamos que, por Teorema de diferenciación de Lebesgue, para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$f(x) - f_Q \le \mathcal{M}_{Q,k}(f - f_Q)(x),$$

c. t. p. $x \in Q$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \left(\int_B |f(x) - f_B|^s dx\right)^{1/s} &\le 2\left(\int_Q |f(x) - f_Q|^s dx\right)^{1/s} \\ &\le 2\left(\int_Q \mathcal{M}_{Q,k_\beta}\left(f - f_Q\right)(x)^s dx\right)^{1/s} \\ &= 2\left(s\int_0^{\infty} t^{s-1}\,|E_t(Q)|\,dt\right)^{1/s} \\ &\le C|B|^{1/s}\left(1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{\sqrt{n}r}\right)^{-1}, \end{aligned}$$

con C independiente de B y f. Luego

$$[f]_{LMO_s^{\beta/\sqrt{n}}} \le C,$$

para toda $f \in LMO^\beta$ con $[f]_{LMO^\beta} = 1$. Para $f \in LMO^\beta$ no nula, consideramos $f/[f]_{LMO^\beta}$ en la desigualdad anterior, obteniendo así

$$[f]_{LMO_s^{\beta/\sqrt{n}}} \le C[f]_{LMO^\beta}.$$

También, la estimación anterior nos dice que $LMO^\beta \subset LMO_s^{\beta/\sqrt{n}}$. Pero, por lo probado previamente, podemos deducir que $LMO^\beta \subset LMO_s^\beta$. Además, es fácil ver que, aplicando la desigualdad de Hölder,

$$[f]_{LMO^\beta} \leq [f]_{LMO_s^\beta}.$$

Por lo tanto, resulta $LMO^\beta = LMO_s^\beta$. □

3.3. Acotaciones para integrales singulares locales y sus conmutadores

En esta sección denotaremos al operador $T^{\beta,\eta}$ en (3.1.12) por T, C_K será la constante en (3.1.11), y probaremos los Teoremas 3.1.19, 3.1.20 y 3.1.21.

Lema 3.3.1. *Sean f y g funciones de $L^1_{loc}(\Omega)$, y $B \in \mathcal{F}_\beta$ cuyo centro es ξ. Entonces*

$$\int_B |gTf|\,dx \leq CC_K \left(\left\|f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right\|_p \|g\chi_B\|_{p'} + \frac{\|g\chi_B\|_1 \left\|f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right\|_1}{|B(\xi, \beta\rho(\xi))|} \right)$$

donde C es independiente de f, g, B y K.

Demostración. Por (3.1.15) de la Observación 3.1.13 resulta

$$\begin{aligned}
\int_B |gTf|\,dx &= \int_B \left|gT\left(f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right)\right| dx \\
&\leq \int_B \text{v.p.} \left| g(x) \int_{\mathcal{S}_\beta(B)} K(x-y) f(y)\,dy \right| dx \\
&\quad + \int_B \left| g(x) \int_{\mathcal{S}_\beta(B)} K(x-y) \left(\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)} \right) - 1 \right) f(y)\,dy \right| dx \\
&\leq \left\| \text{v.p.} K * \left(f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right) \right\|_p \|g\chi_B\|_{p'} \\
&\quad + \int_B |g(x)| \int_{\mathcal{S}_\beta(B) - B(x,\beta\rho(x)/2)} |K(x-y) f(y)|\,dydx \\
&\leq C_K \left\|f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right\|_p \|g\chi_B\|_{p'} + C_K \int_B \frac{2^n |g(x)|}{(\beta\rho(x))^n} \int_{\mathcal{S}_\beta(B)} |f(y)|\,dydx \\
&\leq C_K \left\|f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right\|_p \|g\chi_B\|_{p'} + \frac{C_K 2^n \|g\chi_B\|_1}{((1-\beta)\beta\rho(\xi))^n} \left\|f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right\|_1 \\
&\leq CC_K \left(\left\|f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right\|_p \|g\chi_B\|_{p'} + \frac{\|g\chi_B\|_1 \left\|f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right\|_1}{|B(\xi,\beta\rho(\xi))|} \right).
\end{aligned}$$

□

El lema siguiente (el cual se probó en el Capítulo 2) será usado para demostrar los resultados de acotaciones de integrales singulares locales.

Lema 3.3.2. *Dados* $\beta \in (0,1)$, $\sigma \in (0, 1-\beta)$, $\theta \in \left(0, \sigma\left(\beta^2+\beta\right)^{-1}\right]$, *se tiene*

$$\mathcal{S}_\beta\left(B(\xi,r)\right) \subset B(\xi,(\beta+\sigma)\rho(\xi)),$$

siempre que $B(\xi,r) \in \mathcal{F}_{\theta\beta}$.

Lema 3.3.3. *Dados* σ *y* θ *como en el Lema 3.3.2, sean* $B = B(\xi,r) \in \mathcal{F}_{\theta\beta/5}$ *y* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *con supp(f)*$\subset \Omega - 5B$. *Entonces,*

$$\int_B |Tf-(Tf)_B|\,dx \leq CC_K r^{n+\delta}\int_{B(\xi,(\beta+\sigma)\rho(\xi))-5B}\frac{|f\left(x\right)|}{|x-\xi|^{n+\delta}}dx,$$

donde δ *es la constante en* (3.1.9) *y* C *es independiente de* B, f, *y* K.

Demostración. Primero, denotamos $K^{\beta,\eta}(x,y) = K(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right)$, para $x\in\Omega$ y $y\neq x$. Se prueba en [HSV19], páginas 12 y 13, que se satisface

$$\left|K^{\beta,\eta}(x,y)-K^{\beta,\eta}(z,y)\right| \leq CC_K\frac{|x-z|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}, \tag{3.3.4}$$

siempre que $|x-y|>2|x-z|$, donde C depende solo de n, β y η. Ahora, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_B |Tf-(Tf)_B|\,dz &\leq |B|^{-1}\int_B\int_B |Tf\left(z\right)-Tf\left(x\right)|\,dxdz\\
&\leq |B|^{-1}\int_B\int_B\int_{\mathcal{S}_\beta(B)-5B}\left|K^{\beta,\eta}\left(z,y\right)-K^{\beta,\eta}\left(x,y\right)\right|\left|f\left(y\right)\right|dydxdz\\
&\leq \int_B\int_{\mathcal{S}_\beta(B)-5B}\left|K^{\beta,\eta}\left(z,y\right)-K^{\beta,\eta}\left(\xi,y\right)\right|\left|f\left(y\right)\right|dydz\\
&\quad+\int_B\int_{\mathcal{S}_\beta(B)-5B}\left|K^{\beta,\eta}\left(\xi,y\right)-K^{\beta,\eta}\left(x,y\right)\right|\left|f\left(y\right)\right|dydx\\
&= 2\int_B\int_{\mathcal{S}_\beta(B)-5B}\left|K^{\beta,\eta}\left(z,y\right)-K^{\beta,\eta}\left(\xi,y\right)\right|\left|f\left(y\right)\right|dydz.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que, si $z\in B$ y $y\notin 5B$, $|y-\xi|>2|z-\xi|$, por (3.3.4) y el Lema 3.3.2 resulta

$$\begin{aligned}
\int_B |Tf-(Tf)_B|\,dz &\leq CC_K\int_B\int_{\mathcal{S}_\beta(B)-5B}\frac{|z-\xi|^\delta}{|y-\xi|^{n+\delta}}\left|f\left(y\right)\right|dydz\\
&\leq CC_K r^{n+\delta}\int_{B(\xi,(\beta+\sigma)\rho(\xi))-5B}\frac{|f\left(y\right)|}{|y-\xi|^{n+\delta}}dy.
\end{aligned}$$

□

En el lema siguiente, y en lo subsecuente, denotaremos

$$B\left(x,\gamma\rho(x)\right)=B_\gamma(x)$$

para $x\in\Omega$ y $0<\gamma<1$.

Lema 3.3.5. *Sean σ, θ, B como en el lema anterior y $k_0\in\mathbb{N}$ tal que*

$$5^{k_0}r\le(\beta+\sigma)\,\rho\,(\xi)<5^{k_0+1}r. \tag{3.3.6}$$

Entonces, si $f\in L^1_{loc}(\Omega)$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{B_{\beta+\sigma}(\xi)-5B}\frac{|f\,(y)-f_{5B}|}{|y-\xi|^{n+\delta}}dy \;&\le\; C_n\frac{\left(5^{k_0}r\right)^{-\delta}}{|B_{\beta+\sigma}\,(\xi)\,|}\int_{B_{\beta+\sigma}(\xi)}\left|f\,(y)-f_{B_{\beta+\sigma}(\xi)}\right|dy\\ &+C_nr^{-\delta}\sum_{k=1}^{k_0-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{5^{-\delta k}}{|5^{j+1}B|}\int_{5^{j+1}B}|f\,(y)-f_{5^{j+1}B}|\,dy.\end{aligned}$$

Demostración. Primero, vemos que la integral en el lado izquierdo de la desigualdad de arriba es la suma de

$$\int_{B_{\beta+\sigma}(\xi)-5^{k_0}B}\frac{|f\,(y)-f_{5B}|}{|y-\xi|^{n+\delta}}dy \tag{3.3.7}$$

y

$$\sum_{k=1}^{k_0-1}\int_{5^{k+1}B-5^kB}\frac{|f\,(y)-f_{5B}|}{|y-\xi|^{n+\delta}}dy. \tag{3.3.8}$$

Ahora, para cada $k=1,\ldots,k_0-1$, tenemos

$$\begin{aligned}|f_{5^{k+1}B}-f_{5B}| \;&\le\; \sum_{j=1}^{k}|f_{5^{j+1}B}-f_{5^jB}|\\ &\le\; \sum_{j=1}^{k}\frac{5^n}{|5^{j+1}B|}\int_{5^{j+1}B}|f\,(y)-f_{5^{j+1}B}|\,dy.\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Por lo tanto, como $5^{j+1}B\in\mathcal{F}_{\beta+\sigma}$ si $1\le j\le k$, para (3.3.8) obtenemos

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{k_0-1}\int_{5^{k+1}B-5^kB}\frac{|f\,(y)-f_{5B}|}{|y-\xi|^{n+\delta}}dy\\ \le\;&\sum_{k=1}^{k_0-1}\left(5^kr\right)^{-n-\delta}\int_{5^{k+1}B}|f\,(y)-f_{5^{k+1}B}|\,dy\\ &+\sum_{k=1}^{k_0-1}\left(5^kr\right)^{-n-\delta}|f_{5^{k+1}B}-f_{5B}|\,|5^{k+1}B|\\ \le\;&\sum_{k=1}^{k_0-1}\left(5^kr\right)^{-n-\delta}\int_{5^{k+1}B}|f\,(y)-f_{5^{k+1}B}|\,dy\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+C_n r^{-\delta} \sum_{k=1}^{k_0-1} \sum_{j=1}^{k} \frac{5^{-\delta k}}{|5^{j+1}B|} \int_{5^{j+1}B} |f(y) - f_{5^{j+1}B}|\, dy \\
\leq\ & C_n r^{-\delta} \sum_{k=1}^{k_0-1} \sum_{j=1}^{k} \frac{5^{-\delta k}}{|5^{j+1}B|} \int_{5^{j+1}B} |f(y) - f_{5^{j+1}B}|\, dy.
\end{aligned}
$$

Para (3.3.7), considerando (3.3.6) y (3.3.9) con $k = k_0 - 1$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\int_{B_{\beta+\sigma}(\xi) - 5^{k_0}B} \frac{|f(y) - f_{5B}|}{|y-\xi|^{n+\delta}} dy \ &\leq\ \left(5^{k_0} r\right)^{-n-\delta} \int_{B_{\beta+\sigma}(\xi)} |f(y) - f_{5^{k_0}B}|\, dy \\
&\quad + \left(5^{k_0} r\right)^{-n-\delta} |f_{5^{k_0}B} - f_{5B}|\, |B_{\beta+\sigma}(\xi)| \\
&\leq\ C_n \frac{\left(5^{k_0} r\right)^{-\delta}}{|B_{\beta+\sigma}(\xi)\,|} \int_{B_{\beta+\sigma}(\xi)} \left| f(y) - f_{B_{\beta+\sigma}(\xi)} \right| dy \\
&\quad + C_n \left(5^{k_0} r\right)^{-\delta} \sum_{j=1}^{k_0-1} \frac{5^n}{|5^{j+1}B|} \int_{5^{j+1}B} |f(y) - f_{5^{j+1}B}|\, dy.
\end{aligned}
$$

Por último, sumando las dos desigualdades anteriores obtenemos el resultado. □

Lema 3.3.10. *Sean $1 \leq q < q_0$, $w \in RH_{q_0}^{\beta}$, $f \in BMO_w^{\beta}$ y $N \geq 2$. Entonces, para cada $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\beta/N}$ se tiene*

$$
\left(\int_{\mathcal{N}_\beta(B)} |f|^q\, dx \right)^{1/q} \leq C\, [f]_{BMO_w^\beta} \frac{w(B)}{|B|^{1-1/q}}
$$

donde C es independiente de f y B.

Demostración. Para algún $a \in (0, \beta/80)$ fijo, sea $\mathcal{W}(B)$ como en la Observación 3.2.4. Entonces, por (3.2.6), (3.2.7), (3.2.5), el Lema 3.2.23, y ya que $\frac{1}{q} \leq 1$, resulta

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\mathcal{N}_\beta(B)} |f|^q\, dx \right)^{1/q} \ &\leq\ \sum_{P \in \mathcal{W}(B)} \left(\int_P |f|^q\, dx \right)^{1/q} \\
&\leq\ [f]_{BMO_{w,q}^a} \sum_{P \in \mathcal{W}(B)} \frac{w(P)}{|P|^{1-1/q}} \\
&\leq\ CM\, [f]_{BMO_w^\beta} \frac{w(B)}{|B|^{1-1/q}}.
\end{aligned}
$$

□

Demostración del Teorema 3.1.19. Tomamos $f \in BMO_w^\beta$ y consideramos σ y θ, dados por el Lema 3.3.2, y $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq \text{máx}\{5, \theta^{-1}\}$. Primero, suponemos $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\beta/N}$

y tomamos $1 < s < q$ para algún $q \in (1, \infty)$ tal que $w \in RH_q^\beta$. Entonces, por el Lema 3.3.1 con $p = s$ y $g = \chi_\Omega$, y el Lema 3.3.10 con s y 1 en lugar de q, respectivamente, resulta

$$\begin{aligned} \int_B |Tf|\, dx &\leq CC_K \left(\left\| f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)} \right\|_s |B|^{1-1/s} + \left\| f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)} \right\|_1 \right) \\ &\leq CC_K w(B) [f]_{BMO_w^\beta}, \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

para toda $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\beta/N}$. Ahora, tomamos $B \in \mathcal{F}_{\beta/N}$, por lo que $B \in \mathcal{F}_{\theta\beta}$ y $5B \in \mathcal{F}_\beta$. Podemos escribir

$$f = (f - f_{5B})\chi_{5B} + (f - f_{5B})\chi_{\Omega - 5B} + f_{5B}.$$

Denotamos $f_1 = (f - f_{5B})\chi_{5B}$ y $f_2 = (f - f_{5B})\chi_{\mathcal{S}_\beta(B) - 5B}$. Entonces, como Tf_1 y Tf_2 están bien definidas en c. t. p. de Ω y $T(f_{5B}) = 0$ por (3.1.14), de (3.1.15) resulta

$$\begin{aligned} &\int_B |Tf - (Tf_2)_B|\, dx \\ = &\int_B |T((f - f_{5B})\chi_{5B}) + T((f - f_{5B})\chi_{\Omega - 5B}) - (Tf_2)_B|\, dx \\ = &\int_B |Tf_1 + Tf_2 - (Tf_2)_B|\, dx \\ \leq &\int_B |Tf_1|\, dx + \int_B |Tf_2 - (Tf_2)_B|\, dx. \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Para el primer término de (3.3.12) consideramos $1 < s < q$. Entonces, por el Lema 3.3.1 con $p = s$, f_1 en vez de f y $g = \chi_\Omega$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_B |Tf_1|\, dx &\leq CC_K \left(\left\| f_1\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)} \right\|_s |B|^{1-1/s} + \left\| f_1\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)} \right\|_1 \right) \\ &\leq CC_K \left(\left(\int_{5B} |f - f_{5B}|^s\, dx \right)^{1/s} |B|^{1/s'} + \int_{5B} |f - f_{5B}|\, dx \right) \\ &\leq CC_K w(5B) \left([f]_{BMO_{w,s}^\beta} \frac{|B|^{1/s'}}{|5B|^{1-1/s}} + [f]_{BMO_w^\beta} \right) \\ &\leq CC_K w(B) \left([f]_{BMO_{w,s}^\beta} + [f]_{BMO_w^\beta} \right) \end{aligned}$$

donde, para la última desigualdad, se usó que w duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$. Luego, aplicando el Lema 3.2.23 se obtiene

$$\int_B |Tf_1|\, dx \leq CC_K [f]_{BMO_w^\beta}\, w(B). \tag{3.3.13}$$

Solo nos queda estimar el segundo término de (3.3.12). Para ello, denotamos $B = B(\xi, r)$ y considerando el Lema 3.3.3 con f_2 en lugar de f, junto con el Lema 3.3.5, se tiene

$$\begin{aligned} \int_B |Tf_2 - (Tf_2)_B|\, dz &\leq CC_K r^{n+\delta} \int_{B_{\beta+\sigma}(\xi) - 5B} \frac{|f(y) - f_{5B}|}{|y - \xi|^{n+\delta}} dy \\ &\leq CC_K \frac{r^n 5^{-\delta k_0}}{|B_{\beta+\sigma}(\xi)|} \int_{B_{\beta+\sigma}(\xi)} \left| f(y) - f_{B_{\beta+\sigma}(\xi)} \right| dy \end{aligned}$$

$$+CC_K r^n \sum_{k=1}^{k_0-1} \sum_{j=1}^{k} \frac{5^{-\delta k}}{|5^{j+1}B|} \int_{5^{j+1}B} |f(y) - f_{5^{j+1}B}|\, dy,$$

donde k_0 es el dado por el Lema 3.3.5. Ahora, por la Observación 3.1.18, existen $C > 0$ y $\varepsilon \in (0, n+\delta)$ tales que, para todo $t > 1$ y $V \in \mathcal{F}_{\beta+\sigma}$, se tiene

$$w(V) \leq Ct^{n+\delta-\varepsilon} w\left(t^{-1}V\right). \tag{3.3.14}$$

Entonces, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_B |Tf_2 - (Tf_2)_B|\, dz &\leq CC_K \frac{r^n 5^{-\delta k_0}}{|B_{\beta+\sigma}(\xi)|} \int_{B_{\beta+\sigma}(\xi)} |f(y)|\, dy \\
&\quad + CC_K r^n \sum_{k=1}^{k_0-1} \sum_{j=1}^{k} \frac{5^{-\delta k} w(5^{j+1}B)}{|5^{j+1}B|} [f]_{BMO_w^{\beta+\sigma}} \\
&\leq CC_K \frac{r^n 5^{-\delta k_0} w(B_{\beta+\sigma}(\xi))}{|B_{\beta+\sigma}(\xi)|} [f]_{BMO_w^{\beta+\sigma}} \\
&\quad + CC_K w(B) [f]_{BMO_w^{\beta+\sigma}} \sum_{k=1}^{k_0-1} \sum_{j=1}^{k} 5^{-\delta k} \left(5^{j+1}\right)^{\delta-\varepsilon}
\end{aligned}$$

Luego, para el primer término de la desigualdad anterior, usando (3.3.6) y (3.3.14) se sigue

$$\begin{aligned}
\frac{r^n 5^{-\delta k_0} w(B_{\beta+\sigma}(\xi))}{|B_{\beta+\sigma}(\xi)|} &\leq C \left(\frac{(\beta+\sigma)\rho(\xi)}{r}\right)^{n+\delta-\varepsilon} \frac{r^n 5^{-\delta k_0} w(B)}{((\beta+\sigma)\rho(\xi))^n} \\
&\leq C \left(\frac{(\beta+\sigma)\rho(\xi)}{r}\right)^{\delta-\varepsilon} 5^{-\delta k_0} w(B) \\
&\leq C \left(\frac{(\beta+\sigma)\rho(\xi)}{r}\right)^{-\varepsilon} w(B) \leq Cw(B)
\end{aligned}$$

Para el segundo término, si $\delta \leq \varepsilon$, resulta

$$\sum_{k=1}^{k_0-1} \sum_{j=1}^{k} 5^{-\delta k} \left(5^{j+1}\right)^{\delta-\varepsilon} \leq \sum_{k=1}^{\infty} k 5^{-\delta k}$$

donde el lado derecho es una serie convergente. Cuando $\delta > \varepsilon$, calculando la suma de la serie geométrica se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{k_0-1} \sum_{j=1}^{k} 5^{-\delta k} \left(5^{j+1}\right)^{\delta-\varepsilon} &= 5^{\delta-\varepsilon} \sum_{k=1}^{k_0-1} 5^{-\delta k} \sum_{j=1}^{k} \left(5^{j}\right)^{\delta-\varepsilon} \\
&= 25^{\delta-\varepsilon} \sum_{k=1}^{k_0-1} 5^{-\delta k} \frac{\left(5^{\delta-\varepsilon}\right)^k - 1}{5^{\delta-\varepsilon} - 1} \\
&< \frac{25^{\delta-\varepsilon}}{5^{\delta-\varepsilon} - 1} \sum_{k=1}^{\infty} 5^{-\varepsilon k},
\end{aligned}$$

donde otra vez tenemos una serie convergente. Por lo tanto, con estas estimaciones y el Lema 3.2.23 obtenemos

$$\int_B |Tf_2 - (Tf_2)_B|\, dz \le CC_K w(B)\,[f]_{BMO_w^\beta}. \tag{3.3.15}$$

Luego, a partir de (3.3.12) con (3.3.13) y (3.3.15) se sigue

$$\int_B |Tf - (Tf_2)_B|\, dz \le CC_K w(B)\,[f]_{BMO_w^\beta}, \tag{3.3.16}$$

para toda $B \in \mathcal{F}_{\beta/N}$. Por último, ya que para cualquier $a \in \mathbb{R}$, $\int_B |Tf - (Tf)_B|\, dx \le 2\int_B |Tf - a|\, dx$, de (3.3.11) junto con (3.3.16) se deduce

$$[Tf]_{BMO_w^\beta} \le CC_K\,[f]_{BMO_w^\beta}.$$

□

Lema 3.3.17. *Sean $0 < \gamma < \beta < 1$ y $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Entonces, existe $C \ge 1$, dependiente solo de n, β y γ, tal que*

$$\left|T^{\beta,\eta}f(x) - T^{\gamma,\eta}f(x)\right| \le \frac{CC_K}{|B_\beta(x)|}\int_{B_\beta(x)} |f|dy,$$

para c. t. p. $x \in \Omega$.

Demostración. Por las propiedades de la función η en (3.1.12), dado $x \in \Omega$, tenemos

$$\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right) - \eta\left(\frac{|x-y|}{\gamma\rho(x)}\right) = 0 \tag{3.3.18}$$

si $y \notin B(x, \beta\rho(x))$ o $y \in B\left(x, \frac{\gamma}{2}\rho(x)\right)$. Entonces, para c. t. p. $x \in \Omega$, por (3.1.12) tenemos

$$\begin{aligned}
\left|T^{\beta,\eta}f(x) - T^{\gamma,\eta}f(x)\right| &\le \text{v.p.}\int_\Omega \left|K^{\beta,\eta}(x,y) - K^{\gamma,\eta}(x,y)\right| |f(y)|\, dy \\
&\le \int_{\frac{\gamma}{2}\rho(x)\le|x-y|<\beta\rho(x)} |K(x-y)|\,|f(y)|\, dy \\
&\le C_K \int_{\frac{\gamma}{2}\rho(x)\le|x-y|<\beta\rho(x)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy \\
&\le C_K \left(\frac{\gamma}{2}\rho(x)\right)^{-n} \int_{|x-y|<\beta\rho(x)} |f(y)|\, dy \\
&= \left(\frac{2\beta}{\gamma}\right)^n C_K (\beta\rho(x))^{-n} \int_{|x-y|<\beta\rho(x)} |f(y)|\, dy.
\end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema 3.1.20. Tomamos $f \in LMO^{\beta}$, θ como en el Lema 3.3.2, $B \in \mathcal{F}_{\theta\beta/\sqrt{n}}$, y denotamos $T^{\gamma} = T^{\gamma,\eta}$ si $0 < \gamma < 1$. Entonces, $f \in BMO^{\beta}$ por lo que $T^{\frac{\beta}{\sqrt{n}}} f$ está bien definida para c. t. p. de Ω y vale (3.1.15) con $\frac{\beta}{\sqrt{n}}$ en lugar de β. Por un lado, suponemos $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_{\frac{\theta\beta}{\sqrt{n}}} - \mathcal{F}_{\frac{\theta\beta}{320\sqrt{n}}}$. Luego, por (3.1.14) y los Lemas 3.3.2, 3.3.1 y 3.2.25, resulta

$$\begin{aligned}
\int_B \left| T^{\frac{\beta}{\sqrt{n}}} f \right| dx &= \int_B \left| T^{\frac{\beta}{\sqrt{n}}} \left(\left(f - f_{B_{\sigma+\beta/\sqrt{n}}(\xi)} \right) \right) \right| dx \\
&\leq CC_K \left(\int_{B_{\sigma+\beta/\sqrt{n}}(\xi)} \left| f - f_{B_{\sigma+\beta/\sqrt{n}}(\xi)} \right|^2 dx \right)^{1/2} |B|^{1/2} \\
&\quad + CC_K \int_{B_{\sigma+\beta/\sqrt{n}}(\xi)} \left| f - f_{B_{\sigma+\beta/\sqrt{n}}(\xi)} \right| dx \\
&\leq CC_K \left([f]_{LMO_2^{\sigma+\beta/\sqrt{n}}} + [f]_{LMO^{\sigma+\beta/\sqrt{n}}} \right) \left| B_{\sigma+\beta/\sqrt{n}}(\xi) \right| \\
&\leq CC_K \left(\frac{320\,(\sigma\sqrt{n} + \beta)}{\theta\beta} \right)^n [f]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}} \left| B_{\frac{\theta\beta}{320\sqrt{n}}}(\xi) \right| \\
&\leq CC_K\, [f]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}} |B|.
\end{aligned}$$

Así hemos obtenido

$$\int_B \left| T^{\frac{\beta}{\sqrt{n}}} f \right| dx \leq CC_K\, [f]_{LMO^{\sqrt{n}\sigma+\beta}} |B|, \tag{3.3.19}$$

para toda $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_{\frac{\theta\beta}{\sqrt{n}}} - \mathcal{F}_{\frac{\theta\beta}{320\sqrt{n}}}$. Por otro lado, consideramos $B \in \mathcal{F}_{\beta} - \mathcal{F}_{\frac{\theta\beta}{320\sqrt{n}}}$ y $\mathcal{W} = \{P_j\} \subset \mathcal{F}_{\frac{\theta\beta}{80\sqrt{n}}} - \mathcal{F}_{\frac{\theta\beta}{320\sqrt{n}}}$ cubrimiento tipo Whitney como en la Observación 3.2.4, con $a = \frac{\theta\beta}{80\sqrt{n}}$. Entonces, por (3.3.19), (3.2.7) y (3.2.5), tenemos

$$\begin{aligned}
\int_B \left| T^{\frac{\beta}{\sqrt{n}}} f \right| dx &\leq \sum_{P \in \mathcal{W}(B)} \int_P \left| T^{\frac{\beta}{\sqrt{n}}} f \right| dx \\
&\leq CC_K\, [f]_{LMO^{\sqrt{n}\sigma+\beta}} \sum_{P \in \mathcal{W}(B)} |P| \\
&\leq CMC_K\, [f]_{LMO^{\sqrt{n}\sigma+\beta}} |B|.
\end{aligned}$$

De este modo, resulta

$$\frac{1 + \log \frac{\beta\rho(\xi)}{r}}{|B|} \int_B \left| T^{\frac{\beta}{\sqrt{n}}} f \right| dx \leq CC_K \left(1 + \log \frac{320\sqrt{n}}{\theta} \right) [f]_{LMO^{\sqrt{n}\sigma+\beta}}.$$

Ahora, consideramos T^{β} y, de nuevo, $T^{\beta} f$ está bien definida para c. t. p. de Ω y vale (3.1.15). Siendo B como antes, por la estimación anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_B \left| T^{\beta} f \right| dx &\leq \int_B \left| T^{\beta} f - T^{\frac{\beta}{\sqrt{n}}} f \right| dx \\
&\quad + \frac{CC_K\, |B|}{1 + \log \frac{\beta\rho(\xi)}{r}} [f]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}}.
\end{aligned}$$

Luego, por (3.1.14) y el Lema 3.3.17 obtenemos

$$\begin{aligned}\int_B \left|T^\beta f - T^{\frac{\beta}{\sqrt{n}}} f\right| dx &= \int_B \left|T^\beta \left(f - f_{B_\beta(x)}\right) - T^{\frac{\beta}{\sqrt{n}}}\left(f - f_{B_\beta(x)}\right)\right| dx \\ &\leq CC_K \int_B (\beta\rho(x))^{-n} \int_{|x-y|<\beta\rho(x)} \left|f(y) - f_{B_\beta(x)}\right| dydx \\ &\leq CC_K |B| [f]_{LMO^\beta} \leq CC_K \frac{1+\log\frac{320\sqrt{n}}{\theta}}{1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{r}} |B| [f]_{LMO^\beta} \\ &\leq \frac{CC_K|B|}{1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{r}} [f]_{LMO^{\beta+\sigma\sqrt{n}}}.\end{aligned}$$

De este modo, resulta

$$\int_B \left|T^\beta f\right| dx \leq \frac{CC_K|B|}{1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{r}} [f]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}}, \tag{3.3.20}$$

para toda $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\frac{\theta\beta}{320\sqrt{n}}}$. Entonces, solo nos queda tomar $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_{\frac{\theta\beta}{320\sqrt{n}}}$. Sean f_1 y f_2 como en la demostración del Teorema 3.1.19. Así, de nuevo obtenemos (3.3.12). En un principio, por los Lemas 3.3.1 y 3.2.25 resulta

$$\begin{aligned}\int_B \left|T^\beta f_1\right| dx &\leq CC_K\left(\left(\int_{5B} |f - f_{5B}|^2 dx\right)^{1/2} |B|^{1/2} + \int_{5B} |f - f_{5B}| dx\right) \\ &\leq \frac{CC_K|B|}{1+\log\frac{\left(\sigma+\beta/\sqrt{n}\right)\rho(\xi)}{5r}}\left([f]_{LMO_2^{\sigma+\beta/\sqrt{n}}} + [f]_{LMO^{\sigma+\beta/\sqrt{n}}}\right) \\ &\leq \frac{\left(1+\log\left(5\sqrt{n}\right)\right) CC_K|B|}{1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{r}} [f]_{LMO^{\sqrt{n}\sigma+\beta}}.\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Luego, si k_0 es el entero positivo dado por el Lema 3.3.5 con $\sqrt{n}\sigma$ en lugar de σ, para la integral del segundo término en (3.3.12), por los Lemas 3.3.3 y 3.3.5 (respectivamente), tenemos

$$\begin{aligned}\int_B \left|T^\beta f_2 - \left(T^\beta f_2\right)_B\right| dz &\leq CC_K r^{n+\delta} \int_{B_{\sqrt{n}\sigma+\beta}(\xi)-5B} \frac{|f(y) - f_{5B}|}{|y-\xi|^{n+\delta}} dy \\ &\leq CC_K r^n \frac{5^{-k_0\delta}}{\left|B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)\right|} \int_{B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)} \left|f(y) - f_{B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)}\right| dy \\ &\quad + CC_K r^n \sum_{k=1}^{k_0-1} \sum_{j=1}^{k} \frac{5^{-\delta k}}{|5^{j+1}B|} \int_{5^{j+1}B} |f(y) - f_{5^{j+1}B}| dy,\end{aligned}$$

por lo que ésta queda acotada por

$$CC_K r^n \left(5^{-k_0\delta} + \sum_{k=1}^{k_0-1} \sum_{j=1}^{k} \frac{5^{-\delta k}}{1+\log\frac{\left(\beta+\sqrt{n}\sigma\right)\rho(\xi)}{5^{j+1}r}}\right) [f]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}}. \tag{3.3.22}$$

Por un lado, estimamos el factor $5^{-\delta k_0}$ que aparece arriba. Para ello, definimos la función real

$$h(t) = \frac{t^\delta}{1+\log t}$$

con $t \geq 1$. Ya que h es continua en su dominio y $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$, existe $C_\delta > 0$ tal que $h(t) \geq C_\delta$, siempre que $t \geq 1$. Entonces, por esto último y (3.3.6) tenemos

$$\begin{aligned} 5^{\delta k_0} &> \left(\frac{\beta+\sigma\sqrt{n}}{5\beta}\right)^\delta \left(\frac{\beta\rho(\xi)}{r}\right)^\delta \\ &\geq \left(\frac{\beta+\sigma\sqrt{n}}{5\beta}\right)^\delta C_\delta \left(1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{r}\right). \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

Por otro lado, vemos que para $j \geq 1$ se tiene

$$1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{r} < j(1+\log 25)\left(1+\log\frac{(\beta+\sqrt{n}\sigma)\rho(\xi)}{5^{j+1}r}\right). \tag{3.3.24}$$

Por lo tanto, llevando (3.3.23) y (3.3.24) a (3.3.22), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_B \left|T^\beta f_2 - \left(T^\beta f_2\right)_B\right| dz &\leq \frac{CC_K r^n}{1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{r}}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k} j5^{-\delta k}\right)[f]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}} \\ &\leq \frac{CC_K |B|}{1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{r}}[f]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}}. \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

Finalmente, de (3.3.21) y (3.3.25) junto con (3.3.12), se consigue

$$\int_B \left|T^\beta f - \left(T^\beta f\right)_B\right| dz \leq \frac{CC_K |B|}{1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{r}}[f]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}}, \tag{3.3.26}$$

para toda $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_{\frac{\theta\beta}{320\sqrt{n}}}$. De este modo, con (3.3.20) y (3.3.26), se concluye la demostración. $\square$

Para probar la acotación de conmutadores de integrales singulares locales serán útiles los siguientes lemas.

Lema 3.3.27. *Sean $T^{\beta,\eta}$ integral singular local y $w \in A_1^\beta$. Entonces, existe $C > 0$ tal que, si $f \in BMO_w^\beta$ y $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_{\beta/25}$, se tiene*

$$|f_{5B}| + \left|T^{\beta,\eta}(f\chi_{\Omega-5B})(\xi)\right| \leq CC_K\frac{1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{r}}{|B|}w(B)[f]_{BMO_w^\beta}.$$

Demostración. Tomamos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$5^{k_0}r \leq \beta\rho(\xi) < 5^{k_0+1}r. \tag{3.3.28}$$

Entonces

$$k_0 < \log 5^{k_0} \leq \log \frac{\beta\rho(\xi)}{r}. \tag{3.3.29}$$

En un principio tenemos

$$|f_{5B}| \leq |5B|^{-1} \int_{5B} |f - f_{5^{k_0}B}|\, dy + \left|5^{k_0}B\right|^{-1} \int_{5^{k_0}B} |f|\, dy. \tag{3.3.30}$$

Para estimar (3.3.30) observamos que por ser $w \in A_1^\beta$ existe una constante C tal que, para cada $V \in \mathcal{F}_\beta$ y cada E subconjunto medible de V, tenemos

$$\frac{w(V)}{|V|} \leq C \frac{w(E)}{|E|}. \tag{3.3.31}$$

Así, por (3.3.31) y (3.3.28), el segundo término en (3.3.30) se estima como

$$\begin{aligned} \left|5^{k_0}B\right|^{-1} \int_{5^{k_0}B} |f|\, dy &\leq \frac{w\left(5^{k_0}B\right)}{|5^{k_0}B|} [f]_{BMO_w^\beta} \\ &\leq C \frac{w(B)}{|B|} [f]_{BMO_w^\beta}. \end{aligned}$$

Para el primer término en (3.3.30) tenemos

$$|5B|^{-1} \int_{5B} |f - f_{5^{k_0}B}|\, dy \leq C \frac{w(B)}{|B|} [f]_{BMO_w^\beta} + \sum_{j=1}^{k_0-1} |f_{5^{j+1}B} - f_{5^jB}|,$$

donde, por (3.3.31) y (3.3.29) resulta

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k_0-1} |f_{5^{j+1}B} - f_{5^jB}| &\leq 5^{n+1} \sum_{j=1}^{k_0-1} \frac{w\left(5^{j+1}B\right)}{|5^{j+1}B|} [f]_{BMO_w^\beta} \\ &\leq 5^{n+1} C (k_0 - 1) \frac{w(B)}{|B|} [f]_{BMO_w^\beta} \\ &\leq 5^{n+1} C \left(\log \frac{\beta\rho(\xi)}{r}\right) \frac{w(B)}{|B|} [f]_{BMO_w^\beta}, \end{aligned}$$

y luego

$$|5B|^{-1} \int_{5B} |f - f_{5^{k_0}B}|\, dy \leq 5^{n+1} C \left(1 + \log \frac{\beta\rho(\xi)}{r}\right) \frac{w(B)}{|B|} [f]_{BMO_w^\beta}.$$

Entonces, sumando las dos desigualdades obtenidas, se consigue

$$|f_{5B}| \leq \left(1 + 5^{n+1}\right) C \frac{1 + \log \frac{\beta\rho(\xi)}{r}}{|B|} w(B) [f]_{BMO_w^\beta}. \tag{3.3.32}$$

Ahora, vemos que el valor $T^{\beta,\eta}\left(f\chi_{\Omega-5B}\right)(\xi)$ está bien definido. De hecho, tenemos

$$\left| \int_{5r \leq |\xi-y| < \beta\rho(\xi)} K^{\beta,\eta}(\xi, y)\, f(y)\, dy \right| \leq C_K \int_{5r \leq |\xi-y| < \beta\rho(\xi)} |\xi - y|^{-n} |f(y)|\, dy$$

$$\leq C_K \frac{w\left(B\left(\xi, \beta\rho\left(\xi\right)\right)\right)}{\left(5r\right)^n} [f]_{BMO_w^\beta} < \infty,$$

por lo que podemos escribir

$$\begin{aligned} T^{\beta,\eta}\left(f\chi_{\Omega-5B}\right)\left(\xi\right) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|\xi-y|\geq\varepsilon} K^{\beta,\eta}\left(\xi,y\right) f\chi_{\Omega-5B}\left(y\right) dy \\ &= \int_{5r\leq|\xi-y|<\beta\rho(\xi)} K^{\beta,\eta}\left(\xi,y\right) f\left(y\right) dy. \end{aligned}$$

Luego, por un lado tenemos

$$\begin{aligned} \left|T^{\beta,\eta}\left(f\chi_{\Omega-5B}\right)\left(\xi\right)\right| &\leq \left|\int_{5r\leq|\xi-y|<5^{k_0}r} K^{\beta,\eta}\left(\xi,y\right) f\left(y\right) dy\right| \\ &\quad + \left|\int_{5^{k_0}r\leq|\xi-y|<\beta\rho(\xi)} K^{\beta,\eta}\left(\xi,y\right) f\left(y\right) dy\right|, \end{aligned} \tag{3.3.33}$$

donde, por (3.3.28), (3.1.7), y (3.3.31), el segundo término de la suma anterior se estima como

$$\begin{aligned} \left|\int_{5^{k_0}r\leq|\xi-y|<\beta\rho(\xi)} K^{\beta,\eta}\left(\xi,y\right) f\left(y\right) dy\right| &\leq C_K \left(\frac{\beta\rho\left(\xi\right)}{5}\right)^{-n} \int_{|\xi-y|<\beta\rho(\xi)} \left|f\left(y\right)\right| dy \\ &\leq 5^n |B(0,1)| C_K \frac{w\left(B\left(\xi,\beta\rho\left(\xi\right)\right)\right)}{\left|B\left(\xi,\beta\rho\left(\xi\right)\right)\right|} [f]_{BMO_w^\beta} \\ &\leq 5^n |B(0,1)| C C_K \frac{w\left(B\right)}{|B|} [f]_{BMO_w^\beta}. \end{aligned} \tag{3.3.34}$$

Por otro lado, por (3.1.14), (3.3.31) y (3.3.29), el primer término de la suma de (3.3.33) se estima como

$$\begin{aligned} \left|\int_{5r\leq|\xi-y|<5^{k_0}r} K^{\beta,\eta}\left(\xi,y\right) f\left(y\right) dy\right| &\leq \sum_{j=1}^{k_0-1} \left|\int_{5^{j+1}B-5^jB} K^{\beta,\eta}\left(\xi,y\right) f\left(y\right) dy\right| \\ &= \sum_{j=1}^{k_0-1} \left|\int_{5^{j+1}B-5^jB} K^{\beta,\eta}\left(\xi,y\right) \left(f\left(y\right) - f_{5^{j+1}B}\right) dy\right| \\ &\leq C_K \sum_{j=1}^{k_0-1} \left(5^j r\right)^{-n} \int_{5^{j+1}B} \left|f\left(y\right) - f_{5^{j+1}B}\right| dy \\ &\leq 5^{n+1} |B(0,1)| C_K \sum_{j=1}^{k_0-1} \frac{w\left(5^{j+1}B\right)}{|5^{j+1}B|} [f]_{BMO_w^\beta} \\ &\leq 5^{n+1} |B(0,1)| C C_K \left(\log \frac{\beta\rho\left(\xi\right)}{r}\right) \frac{w\left(B\right)}{|B|} [f]_{BMO_w^\beta}. \end{aligned} \tag{3.3.35}$$

Entonces, sumando las desigualdades (3.3.32), (3.3.33), (3.3.34), (3.3.35), y considerando que C_K puede tomarse no menor a 1, obtenemos la desigualdad buscada con una constante C que depende de n, w, y β, pero es independiente del núcleo K. □

Para lo que sigue, si $f \in BMO^\beta$, denotamos

$$\mathcal{O}^\beta(f) = \sup_{B\in\mathcal{F}_\beta} |B|^{-1} \int_B |f - f_B|\, dx,$$

lo cual es una cantidad finita. En particular, podemos observar que

$$\mathcal{O}^\beta(f) \leq \text{mín}(2[f]_{BMO^\beta}, [f]_{LMO^\beta}).$$

Lema 3.3.36. *Sean $f \in BMO^\beta$ y, para $a \in (0, \beta/80)$, $\mathcal{W} = \{P_j\} \subset \mathcal{F}_a - \mathcal{F}_{a/4}$ cubrimiento tipo Whitney para Ω como el dado en [HSV14] (Lema 1.0.6). Si $N \geq 2$, existe $C > 0$ tal que, para toda $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\beta/N}$, se tiene*

$$\sum_{P\in\mathcal{W}(B)} |f_P - f_B| \leq C\mathcal{O}^\beta(f),$$

donde $\mathcal{W}(B) = \{P \in \mathcal{W} : P \cap \mathcal{N}_\beta(B) \neq \varnothing\}$.

Demostración. Por [HSV14] página 619, para cada $P \in \mathcal{W}(B)$ existen $m_P \in \mathbb{N}$, con $m_P \leq M$ (M dado por (3.2.5)), y $\left\{B_i^P\right\}_{i=1,\ldots,m_P} \subset \mathcal{W}$ verificando que, para cada $i = 1, \ldots, m_P - 1$, $B_i^P \cap B_{i+1}^P \neq \varnothing$, $P = B_1^P$, y el centro de B está en $B_{m_P}^P$. Luego, por el Lema 2.3 de [HSV14] (Lema 1.0.6), se deducen

$$B_i^P \subset 5B_{i+1}^P,\ B_{i+1}^P \subset 5B_i^P \tag{3.3.37}$$

y

$$B_{m_P}^P \subset B. \tag{3.3.38}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{P\in\mathcal{W}(B)} |f_P - f_B| &\leq \sum_{P\in\mathcal{W}(B)} \sum_{i=1}^{m_P-1} \left|f_{B_i^P} - f_{B_{i+1}^P}\right| \\ &\quad + \sum_{P\in\mathcal{W}(B)} \left|f_{B_{m_P}^P} - f_B\right|. \end{aligned}\tag{3.3.39}$$

Ahora, ya que por (3.3.38) tenemos $B_{m_P}^P \in \mathcal{W}(B)$, por (3.2.6), la segunda suma en (3.3.39) se estima como

$$\begin{aligned}\sum_{P\in\mathcal{W}(B)} \left|f_{B_{m_P}^P} - f_B\right| &\leq \sum_{P\in\mathcal{W}(B)} \left|B_{m_P}^P\right|^{-1} \int_{B_{m_P}^P} |f(y) - f_B|\, dy \\ &\leq \frac{CM}{|B|} \int_B |f(y) - f_B|\, dy \leq CM\mathcal{O}^\beta(f). \end{aligned}\tag{3.3.40}$$

Para la primera suma en (3.3.39), si $1 \leq i \leq m_P - 1$, por (3.3.37) tenemos

$$\left|f_{B_i^P} - f_{B_{i+1}^P}\right| \leq \left|f_{B_i^P} - f_{5B_i^P}\right| + \left|f_{5B_i^P} - f_{B_{i+1}^P}\right|$$

$$\begin{aligned}
&\le \left|B_i^P\right|^{-1}\int_{B_i^P}\left|f(y)-f_{5B_i^P}\right|dy\\
&\quad+\left|B_{i+1}^P\right|^{-1}\int_{B_{i+1}^P}\left|f(y)-f_{5B_i^P}\right|dy\\
&\le \left(\left|B_i^P\right|^{-1}+\left|B_{i+1}^P\right|^{-1}\right)\left|5B_i^P\right|\mathcal{O}^\beta(f)\\
&\le C\mathcal{O}^\beta(f),
\end{aligned}$$

y luego, por (3.2.5)

$$\sum_{P\in\mathcal{W}(B)}\sum_{i=1}^{m_P-1}\left|f_{B_i^P}-f_{B_{i+1}^P}\right|\le CM^2\mathcal{O}^\beta(f). \tag{3.3.41}$$

Por lo tanto, con (3.3.40) y (3.3.41) en (3.3.39), el resultado queda probado. □

Lema 3.3.42. *Sean $q\in(1,\infty)$ y $w\in RH_q^\beta$. Entonces, dados $N\ge 2$ y $1\le t<q$, existe $C>0$ tal que, si $b\in LMO^\beta$, $f\in BMO_w^\beta$, y $B\in\mathcal{F}_\beta-\mathcal{F}_{\beta/N}$, se tiene*

$$\left(\int_{\mathcal{N}_\beta(B)}\left|(b(y)-b_B)\,f(y)\right|^t dy\right)^{1/t}\le C\frac{w(B)}{|B|^{1-1/t}}[b]_{LMO^\beta}[f]_{BMO_w^\beta}.$$

Demostración. Tomamos $\mathcal{W}=\{P_j\}\subset\mathcal{F}_{\frac{\beta}{85\sqrt{n}}}-\mathcal{F}_{\frac{\beta}{340\sqrt{n}}}$ cubrimiento tipo Whitney para Ω dado por la Observación 3.2.4 con $a=\beta\,(85\sqrt{n})^{-1}$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathcal{N}_\beta(B)}\left|(b(y)-b_B)\,f(y)\right|^t dy\right)^{1/t}\\
&\le \sum_{P\in\mathcal{W}(B)}\left(\int_P\left|(b(y)-b_P)\,f(y)\right|^t dy\right)^{1/t}\\
&\quad+\sum_{P\in\mathcal{W}(B)}|b_P-b_B|\left(\int_P|f(y)|^t dy\right)^{1/t}.
\end{aligned}\tag{3.3.43}$$

Para el primer término de la suma en (3.3.43), consideramos $s\in(t,q)$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{P\in\mathcal{W}(B)}\left(\int_P\left|(b(y)-b_P)\,f(y)\right|^t dy\right)^{1/t}\\
&\le \sum_{P\in\mathcal{W}(B)}\left(\int_P|b(y)-b_P|^{t(s/t)'}dy\right)^{1/(t(s/t)')}\left(\int_P|f(y)|^s dy\right)^{1/s}\\
&\le C\,[b]_{LMO_{t(s/t)'}^{\beta/\sqrt{n}}}[f]_{BMO_{w,s}^\beta}\sum_{P\in\mathcal{W}(B)}\frac{w(P)}{|P|}|P|^{1/t}\\
&\le CM\frac{w(B)}{|B|^{1-1/t}}[b]_{LMO^\beta}[f]_{BMO_w^\beta},
\end{aligned}\tag{3.3.44}$$

por el Lema 3.2.23, el Lema 3.2.25, (3.2.6), (3.2.7), y (3.2.5). Para el segundo término de la suma en (3.3.43), por el Lema 3.2.23, (3.2.6), (3.2.7), y el Lema 3.3.36, conseguimos

$$\begin{aligned}
&\sum_{P\in\mathcal{W}(B)} |b_P - b_B| \left(\int_P |f|^t\, dy\right)^{1/t} \\
\leq\ & C\,[f]_{BMO^\beta_{w,t}} \sum_{P\in\mathcal{W}(B)} \frac{w(P)}{|P|}|P|^{1/t}\,|b_P-b_B| \\
\leq\ & C\,[f]_{BMO^\beta_w} \frac{w(B)}{|B|^{1-1/t}} \sum_{P\in\mathcal{W}(B)} |b_P-b_B| \\
\leq\ & C[b]_{LMO^\beta}\,[f]_{BMO^\beta_w} \frac{w(B)}{|B|^{1-1/t}}. \qquad (3.3.45)
\end{aligned}$$

Entonces, usando (3.3.44) y (3.3.45) en (3.3.43), obtenemos el resultado. □

Demostración del Teorema 3.1.21. Sean T^β, integral singular como en (3.1.12), y θ, como en el Lema 3.3.2, correspondiente a $\beta/\sqrt{n}$. Dada $f \in BMO_w^\beta$, primero tomamos $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\frac{\theta\beta}{320\sqrt{n}}}$. Entonces

$$T_b^\beta f = bT^\beta f - T^\beta(bf) + b_B T^\beta f - b_B T^\beta f,$$

por lo que se tiene

$$\int_B \left|T_b^\beta f\right| dx \leq \int_B \left|(b-b_B)T^\beta f\right| dx + \int_B \left|T^\beta\left((b-b_B)f\right)\right| dx. \qquad (3.3.46)$$

Por un lado, por el Lema 3.3.42 con $t = 1$ y el Teorema 3.1.19, el primer término de la suma en (3.3.46) se estima por

$$\begin{aligned}
\int_B \left|(b-b_B)T^\beta f\right| dx \ &\leq\ Cw(B)\,[b]_{LMO^\beta}[T^\beta f]_{BMO^\beta_w} \\
&\leq\ CC_K w(B)\,[b]_{LMO^\beta}[f]_{BMO^\beta_w},
\end{aligned}$$

con $1 < s < q$ y $w \in RH_q^\beta$. Por otro lado, si B tiene centro ξ, para el segundo término en (3.3.46), aplicando el Lema 3.3.1 con $(b-b_B)\,f$ en lugar de f y el Lema 3.3.42, se tiene

$$\begin{aligned}
&\int_B \left|T^\beta\left((b-b_B)\,f\right)\right| dx \\
\leq\ & CC_K\left(\left\|(b-b_B)f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right\|_s \|\chi_B\|_{s'} + \frac{\|\chi_B\|_1 \left\|(b-b_B)f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right\|_1}{|B(\xi,\beta\rho(\xi))|}\right) \\
\leq\ & CC_K\left([b]_{LMO^\beta}\,[f]_{BMO^\beta_w} \frac{w(B)}{|B|^{1/s'}}\,\|\chi_B\|_{s'} + [b]_{LMO^\beta}\,[f]_{BMO^\beta_w}\, w(B)\right) \\
=\ & CC_K w(B)\,[b]_{LMO^\beta}\,[f]_{BMO^\beta_w}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en (3.3.46) se obtiene

$$\int_B \left|T_b^\beta f\right| dx \leq CC_K [b]_{LMO^\beta} [f]_{BMO_w^\beta} w(B), \tag{3.3.47}$$

para toda $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\frac{\theta\beta}{320\sqrt{n}}}$. Ahora, sean $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_{\frac{\theta\beta}{320\sqrt{n}}}$, $f_1 = (f - f_{5B})\chi_{5B}$ y $f_2 = (f - f_{5B})\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)-5B}$. Como

$$f = (f - f_{5B})\chi_{5B} + (f - f_{5B})\chi_{\Omega-5B} + f_{5B},$$

por (3.1.15) y (3.1.14), para c. t. p. de B, se tiene

$$\begin{aligned} T_b^\beta f &= T_b^\beta \left(f\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right) = T_b^\beta f_1 + T_b^\beta f_2 + f_{5B} T_b^\beta \chi_{\mathcal{S}_\beta(B)} \\ &= T_b^\beta f_1 + T_b^\beta f_2 + f_{5B}\left(bT^\beta \chi_{B_{\beta+\sigma\sqrt{n}}(\xi)} - T^\beta b\right) \\ &= T_b^\beta f_1 + T_b^\beta f_2 - f_{5B} T^\beta b, \end{aligned}$$

y luego

$$\begin{aligned} T_b^\beta f - \left(T_b^\beta f\right)_B &= T_b^\beta f_1 - \left(T_b^\beta f_1\right)_B + T_b^\beta f_2 - \left(T_b^\beta f_2\right)_B \\ &\quad - f_{5B}\left(T^\beta b - \left(T^\beta b\right)_B\right) \\ &= T_b^\beta f_1 - \left(T_b^\beta f_1\right)_B + (b - b_B) T^\beta f_2 \\ &\quad - T^\beta((b - b_B) f_2) - |B|^{-1} \int_B (b(y) - b_B) T^\beta f_2(y)\, dy \\ &\quad + |B|^{-1} \int_B T^\beta((b - b_B) f_2)(y)\, dy \\ &\quad - f_{5B}\left(T^\beta b - \left(T^\beta b\right)_B\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, para c. t. p. $x \in B$, $T_b^\beta f(x) - \left(T_b^\beta f\right)_B$ es igual a

$$\begin{aligned} & T_b^\beta f_1(x) - \left(T_b^\beta f_1\right)_B + (b(x) - b_B)\left(T^\beta f_2(x) - T^\beta f_2(\xi)\right) \\ & - |B|^{-1} \int_B (b(y) - b_B)\left(T^\beta f_2(y) - T^\beta f_2(\xi)\right) dy \\ & + (b(x) - b_B) T^\beta f_2(\xi) - |B|^{-1} \int_B (b(y) - b_B) T^\beta f_2(\xi)\, dy \\ & + |B|^{-1} \int_B \left(T^\beta((b - b_B) f_2)(y) - T^\beta((b - b_B) f_2)(x)\right) dy \\ & - f_{5B}\left(T^\beta b(x) - \left(T^\beta b\right)_B\right). \end{aligned}$$

De este modo, $\int_B \left|T_b^\beta f(x) - \left(T_b^\beta f\right)_B\right| dx$ se estima con la suma de los términos

$$2\int_B \left|T_b^\beta f_1(x)\right| dx, \tag{3.3.48}$$

$$2\int_B |b(y)-b_B|\left|T^\beta f_2(y)-T^\beta f_2(\xi)\right|dy, \tag{3.3.49}$$

$$2\left|T^\beta f_2(\xi)\right|\int_B |b(y)-b_B|\,dy+|f_{5B}|\int_B \left|T^\beta b(x)-\left(T^\beta b\right)_B\right|dx, \tag{3.3.50}$$

y

$$|B|^{-1}\int_B\int_B \left|T^\beta\left((b-b_B)f_2\right)(y)-T^\beta\left((b-b_B)f_2\right)(x)\right|dydx. \tag{3.3.51}$$

Por lo tanto, si cada uno de los términos anteriores se estiman con

$$CC_K^2 w(B)\,[b]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}}\,[f]_{BMO_w^\beta},$$

obtendremos

$$\int_B \left|T_b^\beta f(x)-\left(T_b^\beta f\right)_B\right|dx\le CC_K^2 w(B)\,[b]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}}\,[f]_{BMO_w^\beta}, \tag{3.3.52}$$

para toda $B\in\mathcal{F}_{\frac{\theta\beta}{320\sqrt{n}}}$. Luego, con (3.3.47) y (3.3.52) el teorema quedará probado. Empezamos con (3.3.48). De igual manera que para (3.3.46), tenemos

$$\int_B \left|T_b^\beta f_1\right|dx\le\int_B \left|(b-b_B)\,T^\beta f_1\right|dx+\int_B \left|T^\beta\left((b-b_B)f_1\right)\right|dx.$$

Por un lado, en el primer término de la suma anterior, considerando el Lema 3.3.1 con $g=b-b_B$ y f_1 en lugar de f, el Lema 3.2.25 y el Lema 3.2.23, resulta

$$\begin{aligned}
&\int_B \left|(b-b_B)T^\beta f_1\right|dx\\
\le\ & CC_K\left\|f_1\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right\|_s\|(b-b_B)\chi_B\|_{s'}\\
&+CC_K\frac{\|(b-b_B)\chi_B\|_1\left\|f_1\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right\|_1}{|B(\xi,\beta\rho(\xi))|}\\
\le\ & CC_K|5B|^{1-1/s}\left(\int_{5B}|f-f_{5B}|^s dx\right)^{1/s}[b]_{LMO_{s'}^{\beta/\sqrt{n}}}\\
&+CC_K\int_{5B}|f-f_{5B}|dx\ [b]_{LMO^\beta}\\
\le\ & CC_K\left([f]_{BMO_{w,s}^\beta}+[f]_{BMO_w^\beta}\right)w(5B)[b]_{LMO^\beta}\\
\le\ & CC_K w(B)[f]_{BMO_w^\beta}[b]_{LMO^\beta},
\end{aligned}$$

donde usamos además que w duplica sobre $\mathcal{F}_\beta$. Por otro lado, si $s<t<q$, aplicando nuevamente el Lema 3.3.1 con $(b-b_B)f_1$ en lugar de f, la desigualdad de Hölder con t/s y t, (3.2.24) y los Lemas 3.2.25 y 3.2.23, en el segundo término se tiene

$$\begin{aligned}
&\int_B \left|T^\beta\left((b-b_B)f_1\right)\right|dx\\
\le\ & CC_K\left\|(b-b_B)f_1\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right\|_s\|\chi_B\|_{s'}+CC_K\frac{\|\chi_B\|_1\left\|(b-b_B)f_1\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right\|_1}{|B(\xi,\beta\rho(\xi))|}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq CC_K\left(\|(b-b_{5B})f_1\|_s+\|(b_{5B}-b_B)f_1\|_s\right)\|\chi_B\|_{s'}\\
&\quad +CC_K\left(\|(b-b_{5B})f_1\|_1+\|(b_{5B}-b_B)f_1\|_1\right)\\
&\leq CC_K\left(\int_{5B}|b-b_{5B}|^{s(t/s)'}dx\right)^{1/(s(t/s)')}\left(\int_{5B}|f-f_{5B}|^t dx\right)^{1/t}|B|^{1/s'}\\
&\quad +\frac{CC_K}{|5B|}\int_{5B}|b-b_{5B}|dx\left(\int_{5B}|f-f_{5B}|^s dx\right)^{1/s}|B|^{1/s'}\\
&\quad +CC_K\left(\int_{5B}|b-b_{5B}|^{t'}dx\right)^{1/t'}\left(\int_{5B}|f-f_{5B}|^t dx\right)^{1/t}\\
&\quad +\frac{CC_K}{|5B|}\int_{5B}|b-b_{5B}|dx\int_{5B}|f-f_{5B}|dx\\
&\leq CC_K\left(\int_{5B}|f-f_{5B}|^t dx\right)^{1/t}\left(|5B|^{(1/s)(1-s/t)+1-1/s}[b]_{LMO^{\beta/\sqrt{n}}_{s(t/s)'}}+|5B|^{1/t'}[b]_{LMO^{\beta/\sqrt{n}}_{t'}}\right)\\
&\quad +CC_K w(5B)[b]_{LMO^\beta}\left([f]_{BMO^\beta_{w,s}}+[f]_{BMO^\beta_w}\right)\\
&\leq CC_K|5B|\left(|5B|^{-1}\int_{5B}|f-f_{5B}|^t dx\right)^{1/t}[b]_{LMO^\beta}+CC_K w(5B)[b]_{LMO^\beta}[f]_{BMO^\beta_w}\\
&\leq CC_K w(5B)\left([f]_{BMO^\beta_{w,t}}+[f]_{BMO^\beta_w}\right)[b]_{LMO^\beta}\leq CC_K w(B)[f]_{BMO^\beta_w}[b]_{LMO^\beta}.
\end{aligned}
$$

Para (3.3.49) se observa que, de la misma manera como se obtiene (3.3.15), se prueba que

$$
r^{n+\delta}\int_{B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)-5B}\frac{|f(y)-f_{5B}|}{|y-\xi|^{n+\delta}}dy\leq Cw(B)[f]_{BMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}_w}
$$

con C independiente de K. Luego, por (3.3.4) junto con la desigualdad anterior y los Lemas 3.3.2 y 3.2.23, tenemos

$$
\begin{aligned}
&\int_B|b(y)-b_B|\left|T^\beta f_2(y)-T^\beta f_2(\xi)\right|dy\\
\leq\;&\int_B|b(y)-b_B|\int_{\mathcal{S}_\beta(B)-5B}\left|K^\beta(y,z)-K^\beta(\xi,z)\right||f(z)-f_{5B}|\,dzdy\\
\leq\;&CC_K\int_B|b(y)-b_B|\int_{\mathcal{S}_\beta(B)-5B}\frac{|\xi-y|^\delta|f(z)-f_{5B}|}{|\xi-z|^{n+\delta}}dzdy\\
\leq\;&CC_K r^\delta\int_B|b(y)-b_B|\left(r^{-n-\delta}w(B)[f]_{BMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}_w}\right)dy\\
\leq\;&CC_K w(B)[b]_{LMO^\beta}[f]_{BMO^\beta_w}.
\end{aligned}
$$

Para (3.3.50), aplicamos (3.1.14), el Teorema 3.1.20, el Lema 3.3.27 y conseguimos

$$
\begin{aligned}
&\left|T^\beta f_2(\xi)\right|\int_B|b(y)-b_B|\,dy+|f_{5B}|\int_B\left|T^\beta b(x)-\left(T^\beta b\right)_B\right|dx\\
\leq\;&\left|T^\beta(f\chi_{\Omega-5B})(\xi)-f_{5B}T^\beta(\chi_{\Omega-5B})(\xi)\right|\frac{|B|\,[b]_{LMO^\beta}}{1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{r}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +|f_{5B}|\,\frac{|B|\left[T^\beta b\right]_{LMO^\beta}}{1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{r}} \\
\leq\;& CC_K\left(\left|T^\beta\left(f\chi_{\Omega-5B}\right)(\xi)\right|+|f_{5B}|\right)\frac{|B|\,[b]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}}}{1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{r}} \\
\leq\;& CC_K^2 w\,(B)\,[f]_{BMO_w^\beta}\,[b]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}}\,.
\end{aligned}
$$

Para (3.3.51), estimamos la integral doble que aparece allí. Considerando el Lema 3.3.3 con $(b-b_B)\,f_2$ en lugar de f, tenemos

$$
\begin{aligned}
& \int_B\int_B\left|T^\beta\left(\left(b-b_B\right)f_2\right)(y)-T^\beta\left(\left(b-b_B\right)f_2\right)(x)\right|dydx \\
\leq\;& 2|B|\int_B\left|T^\beta\left(\left(b-b_B\right)f_2\right)(z)-\left(T^\beta\left(\left(b-b_B\right)f_2\right)\right)_B\right|dz \\
\leq\;& CC_K r^{2n+\delta}\int_{B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)-5B}\frac{|b(z)-b_B|\,|f(z)-f_{5B}|}{|z-\xi|^{n+\delta}}dz. \qquad (3.3.53)
\end{aligned}
$$

Ahora, sea $j_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$
5^{j_0-1}r\leq\frac{\theta\beta\rho(\xi)}{320\sqrt{n}}<5^{j_0}r. \qquad (3.3.54)
$$

Se observa de esta desigualdad que $5^{j_0}B\in\mathcal{F}_{\frac{\theta\beta}{5\sqrt{n}}}$. Luego, la integral que aparece en (3.3.53) es la suma de

$$
\int_{B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)-5^{j_0}B}\frac{|b(z)-b_B|\,|f(z)-f_{5B}|}{|\xi-z|^{n+\delta}}dz \qquad (3.3.55)
$$

y

$$
\int_{5^{j_0}B-5B}\frac{|b(z)-b_B|\,|f(z)-f_{5B}|}{|\xi-z|^{n+\delta}}dz. \qquad (3.3.56)
$$

Por un lado, (3.3.55) se estima con

$$
\left(5^{j_0}r\right)^{-n-\delta}\left(\int_{B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)}|b(z)-b_B|^{s'}dz\right)^{1/s'}\left(\int_{B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)}|f(z)-f_{5B}|^{s}dz\right)^{1/s}.
$$

Para la primera integral de arriba, aplicando el Lema 3.3.42 con χ_Ω en lugar de f y w, junto con (3.3.9) y (3.3.54), conseguimos

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)}|b(z)-b_B|^{s'}dz\right)^{1/s'} \leq\;& \left(\int_{\mathcal{N}_{\beta+\sqrt{n}\sigma}\left(5^{j_0}B\right)}\left|b(z)-b_{5^{j_0}B}\right|^{s'}dz\right)^{1/s'} \\
& +\left|b_{5^{j_0}B}-b_B\right|\left|B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)\right|^{1/s'} \\
\leq\;& C\,[b]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}}\left|5^{j_0}B\right|^{1/s'} \\
& +5^n\left|B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)\right|^{1/s'}j_0\,[b]_{LMO^\beta} \\
\leq\;& C\,[b]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}}\,j_0\left|B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)\right|^{1/s'}. \qquad (3.3.57)
\end{aligned}
$$

Para la segunda integral se observa que, por ser $w \in A_1^\beta$, de (3.3.9) se puede obtener

$$|f_{5^k B} - f_{5B}| \leq Ck \frac{w(B)}{|B|} [f]_{BMO_w^\beta}, \tag{3.3.58}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que $5^k B \in \mathcal{F}_\beta$. Entonces, por el Lema 3.2.23, (3.3.58), la Observación 3.1.2, y (3.3.54), resulta

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)} |f(z) - f_{5B}|^s \, dz\right)^{1/s} \\
\leq\ & \left(\int_{B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)} |f(z) - f_{5^{j_0}B}|^s \, dz\right)^{1/s} + |f_{5^{j_0}B} - f_{5B}| \left|B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)\right|^{1/s} \\
\leq\ & \left(\int_{B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)} |f(z)|^s \, dz\right)^{1/s} + |f_{5^{j_0}B}| \left|B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)\right|^{1/s} \\
& + C j_0 \frac{w(B)}{|B|} [f]_{BMO_w^\beta} \left|B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)\right|^{1/s} \\
\leq\ & C \left(\frac{w\left(B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)\right)}{\left|B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)\right|} + \frac{w(5^{j_0}B)}{|5^{j_0}B|}\right) [f]_{BMO_w^\beta} \left|B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)\right|^{1/s} \\
& + C j_0 \frac{w(B)}{|B|} [f]_{BMO_w^\beta} \left|B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)\right|^{1/s} \\
\leq\ & C j_0 \frac{w(B)}{|B|} [f]_{BMO_w^\beta} \left|B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)\right|^{1/s}.
\end{aligned} \tag{3.3.59}$$

Por lo tanto, con (3.3.54), (3.3.57) y (3.3.59) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi) - 5^{j_0}B} \frac{|b(z) - b_B| \, |f(z) - f_{5B}|}{|\xi - z|^{n+\delta}} dz \\
\leq\ & \frac{C j_0^2}{|5^{j_0}B| (5^{j_0} r)^\delta} \frac{w(B)}{|B|} [f]_{BMO_w^\beta} [b]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}} \left|B_{\beta+\sqrt{n}\sigma}(\xi)\right| \\
\leq\ & \frac{C j_0^2}{5^{j_0 \delta}} r^{-n-\delta} w(B) [f]_{BMO_w^\beta} [b]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}} \\
<\ & \left(C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2}{5^{j\delta}}\right) r^{-n-\delta} w(B) [f]_{BMO_w^\beta} [b]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}}.
\end{aligned} \tag{3.3.60}$$

Por otro lado, (3.3.56) se estima con

$$\sum_{j=1}^{j_0-1} (5^j r)^{-n-\delta} \left(\int_{5^{j+1}B} |b(z) - b_B|^{s'} \, dz\right)^{1/s'} \left(\int_{5^{j+1}B} |f(z) - f_{5B}|^s \, dz\right)^{1/s}$$

Ahora, si $1 \leq j \leq j_0 - 1$, aplicando (3.3.9) y el Lema 3.2.25, primero conseguimos

$$\left(\int_{5^{j+1}B} |b(z) - b_B|^{s'} \, dz\right)^{1/s'} \quad \leq \quad \left(\int_{5^{j+1}B} |b(z) - b_{5^{j+1}B}|^{s'} \, dz\right)^{1/s'}$$

$$\begin{aligned} & +\left|b_{5^{j+1}B}-b_B\right|\left|5^{j+1}B\right|^{1/s'} \\ \leq\ & [b]_{LMO_{s'}^{\beta/\sqrt{n}}}\left|5^{j+1}B\right|^{1/s'} \\ & +Cj\,[b]_{LMO^\beta}\left|5^{j+1}B\right|^{1/s'} \\ \leq\ & Cj\,[b]_{LMO^\beta}\left|5^{j}B\right|^{1/s'}. \end{aligned} \tag{3.3.61}$$

Luego, por (3.3.58), (3.3.31) y el Lema 3.2.23, se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\int_{5^{j+1}B}\left|f(z)-f_{5B}\right|^s dz\right)^{1/s} \leq\ & \left(\int_{5^{j+1}B}\left|f(z)-f_{5^{j+1}B}\right|^s dz\right)^{1/s} \\ & +\left|f_{5^{j+1}B}-f_{5B}\right|\left|5^{j+1}B\right|^{1/s} \\ \leq\ & \frac{w\left(5^{j+1}B\right)}{\left|5^{j+1}B\right|}[f]_{BMO_{w,s}^\beta}\left|5^{j+1}B\right|^{1/s} \\ & +Cj\frac{w(B)}{|B|}[f]_{BMO_w^\beta}\left|5^{j+1}B\right|^{1/s} \\ \leq\ & Cj\frac{w(B)}{|B|}[f]_{BMO_w^\beta}\left|5^{j}B\right|^{1/s}. \end{aligned} \tag{3.3.62}$$

Entonces, por (3.3.61) y (3.3.62) se consigue

$$\begin{aligned} & \int_{5^{j_0}B-5B}\frac{\left|b(z)-b_B\right|\left|f(z)-f_{5B}\right|}{|\xi-z|^{n+\delta}}dz \\ \leq\ & C\sum_{j=1}^{j_0-1}\left(5^j r\right)^{-n-\delta} j^2\frac{w(B)}{|B|}[b]_{LMO^\beta}[f]_{BMO_w^\beta}\left|5^jB\right| \\ <\ & \left(C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j^2}{5^{j\delta}}\right) r^{-n-\delta} w(B)\,[f]_{BMO_w^\beta}[b]_{LMO^\beta}. \end{aligned} \tag{3.3.63}$$

De este modo, llevando (3.3.60) y (3.3.63) a (3.3.53), logramos estimar (3.3.51) con

$$CC_K w(B)\,[f]_{BMO_w^\beta}[b]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}},$$

donde C no depende del núcleo K. □

3.4. Acotaciones con núcleo variable

En esta sección desarrollaremos los resultados que nos permitirán probar el Teorema 3.1.23. Como es ya sabido en el caso no local, para estudiar acotaciones de integrales singulares como en (3.1.22) se considerará un *sistema ortonormal completo de armónicos esféricos* para $L^2(S^{n-1})$ como el dado en [CFL91] y [SS06]. Llamaremos *armónicos esféricos de grado* $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ a las restricciones a $S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1\}$ de polinomios armónicos homogéneos de grado m. Denotemos a este espacio $\mathcal{H}_m$ y, como cada uno de estos es finito dimensional, ponemos g_m =dim($\mathcal{H}_m$). Es sabido que el espacio de todas las combinaciones lineales finitas de funciones en $\bigcup_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \mathcal{H}_m$ es denso en $L^2\left(S^{n-1}\right)$. De este modo, existe

$$\{Y_{m,k}\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\},\, k=1,\dots,g_m},$$

sistema ortonormal completo de $L^2\left(S^{n-1}\right)$ de armónicos esféricos. Este sistema satisface ciertas propiedades particulares que estudiaremos a continuación.

Proposición 3.4.1. *Para todos $m \in \mathbb{N}$, $k = 1, \dots, g_m$ y $\zeta \in S^{n-1}$,*

$$g_m \leq Cm^{n-2}, \tag{3.4.2}$$

$$|Y_{m,k}(\zeta)| \leq Cm^{\frac{n}{2}-1}. \tag{3.4.3}$$

Demostración. (3.4.2) puede deducirse de la expresión de g_m como diferencia de números combinatorios (ver, por ejemplo, [SW16] página 140). (3.4.3) se prueba en [CZ89]. □

Proposición 3.4.4. *Para todos $m \in \mathbb{N}$ y $k = 1, \dots, g_m$ tenemos*

$$\int_{S^{n-1}} Y_{m,k}(\zeta)d\sigma(\zeta) = 0 \tag{3.4.5}$$

y

$$\left|\frac{Y_{m,k}((x-y)')}{|x-y|^n} - \frac{Y_{m,k}(x')}{|x|^n}\right| \leq Cm^{\frac{n}{2}}\frac{|y|}{|x|^{n+1}} \tag{3.4.6}$$

siempre que $|x| > 2|y|$, donde $z' = z/|z|$, para $z \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Más aún,

$$K_{m,k}(x) = \frac{Y_{m,k}(x')}{|x|^n}, \tag{3.4.7}$$

para $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, define un núcleo de C-Z con condiciones de tamaño y suavidad dominadas por la constante $Cm^{\frac{n}{2}}$ y, para $1 < p < \infty$, hay una constante $C_{n,p}$, que depende solo de n y p, tal que, el operador integral singular definido por

$$R_{m,k}f = v.p.K_{m,k} * f$$

para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, satisface

$$\|R_{m,k}f\|_p \leq C_{n,p}m^{\frac{n}{2}} \|f\|_p\,. \tag{3.4.8}$$

Observación 3.4.9. La acotación sobre L^p del operador integral singular es directa desde el hecho de que $K_{m,k}$ es un núcleo de C-Z. Lo que aquí importa para posteriores aplicaciones es la dependencia (posible) de la constante del operador con respecto a m. Desde (3.4.3) y (3.4.6) parece obvio que tal constante puede tomarse como un múltiplo de $m^{\frac{n}{2}}$. Sin embargo, en [CFL91], al aplicar este tipo de estimación con el operador $R_{m,k}$, mencionan (sin demostración) que la constante es independiente de m y k. Por otro lado, en [CZ89] se enuncia la estimación (3.4.8) como un resultado demostrable con lo hecho en ese artículo, pero tal prueba no está hecha ni hace una mención implícita sobre la dependencia con respecto a m de tal constante. Por tal motivo daremos una demostración de la proposición anterior.

Demostración de la Proposición 3.4.4. Denotemos con Y_m, con $m \geq 1$, a cualquier armónico esférico arbitrario de grado m del sistema $\{Y_{h,k}\}_{h\in\mathbb{N},\ k=1,\dots,g_h}$. Entonces, hay un polinomio P_m armónico homogéneo de grado m tal que

$$Y_m(x') = \frac{P_m(x)}{|x|^m}$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Por un lado, por propiedad de las funciones armónicas sobre $\mathbb{R}^n$, el promedio sobre una esfera de una función armónica es igual al valor de la función en el centro de la esfera. De este modo, como P_m es homogéneo de grado m, se tiene

$$\int_{S^{n-1}} Y_m d\sigma = \int_{S^{n-1}} P_m d\sigma = |S^{n-1}|P_m(0) = 0,$$

por lo que probamos (3.4.5). Por otro lado, como se indica en [CZ89] (página 903), tenemos que

$$D_j P_m = \lambda P_{m-1}$$

donde D_j es la derivada parcial de primer orden con respecto a la variable x_j, P_{m-1} es un polinomio armónico homogéneo de grado $m-1$ y $|\lambda| \leq Cm$, con C independiente de m. Entonces

$$Y_{m-1}(x') = \frac{P_{m-1}(x)}{|x|^{m-1}}$$

es un armónico esférico de grado $m-1$ y, por (3.4.3),

$$\begin{aligned}
|(D_j Y_m)(x)| &= \left|D_j\left(|\cdot|^{-m}P_m\right)(x)\right| \\
&\leq \left|D_j\left(|\cdot|^{-m}\right)(x)P_m(x)\right| + |x|^{-m}|\lambda P_{m-1}(x)| \\
&\leq \frac{m|x_j|}{|x|^{m+2}}\,|P_m(x)| + \frac{Cm}{|x|^m}\,|P_{m-1}(x)| \\
&\leq \frac{m}{|x|}\,|Y_m(x')| + \frac{Cm}{|x|}\,|Y_{m-1}(x')| \\
&\leq \frac{Cm}{|x|}\left(m^{\frac{n}{2}-1} + (m-1)^{\frac{n}{2}-1}\right) \leq \frac{Cm^{n/2}}{|x|},
\end{aligned}$$

para todo $x \neq 0$. De este modo, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left|\left(D_j\left(|\cdot|^{-n}Y_m\right)\right)(x)\right| &\leq \left|D_j\left(|\cdot|^{-n}\right)(x)Y_m(x')\right| + |x|^{-n}|\left(D_jY_m\right)(x)| \\
&\leq \frac{n|x_j|}{|x|^{n+2}}|Y_m(x')| + C|x|^{-n-1}m^{n/2} \leq \frac{Cm^{n/2}}{|x|^{n+1}}, \qquad (3.4.10)
\end{aligned}$$

aplicando nuevamente (3.4.3). Ahora, siendo $K_{m,k}$ como en (3.4.7), dados x e y tales que $|x| > 2|y|$, por el teorema del valor medio y la desigualdad de Schwartz, existe un punto ξ en el segmento que une $x-y$ y x tal que

$$|K_{m,k}(x-y) - K_{m,k}(x)| \leq |DK_{m,k}(\xi)||y|.$$

Por lo tanto, ya que $|\xi| > |x|/2$, de la desigualdad de arriba junto con (3.4.10) se obtiene

$$|K_{m,k}(x-y) - K_{m,k}(x)| \leq \frac{Cm^{n/2}}{|x|^{n+1}}|y|,$$

donde C solo depende de n. De este modo hemos probado (3.4.6).

Para probar (3.4.8) consideramos la proposición 5.5 en [DZ01] página 94. Siguiendo la demostración de dicho resultado y teniendo en cuenta (3.4.5), (3.4.3) y (3.4.6), vemos que, para cada $\varepsilon > 0$,

$$\left|\widehat{K_{m,k,\varepsilon}}(\xi)\right| \leq C m^{n/2},$$

donde $K_{m,k,\varepsilon} = K_{m,k}\chi_{B(0,\varepsilon)^c}$ y C es independiente de ε, k y m. Entonces, por la identidad de Plancherel

$$\begin{aligned}\|R_{m,k}f\|_{L^2} &\leq \lim_{\varepsilon\to 0^+} \|K_{m,k,\varepsilon} * f\|_{L^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\|\widehat{K_{m,k,\varepsilon}}\widehat{f}\right\|_{L^2} \\ &\leq \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\|\widehat{K_{m,k,\varepsilon}}\right\|_{\infty} \|f\|_{L^2} \leq C m^{n/2} \|f\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Por último, el Teorema 4.3.3 en [Gra08] página 290, nos dice que hay una constante $C_{n,p}$, que depende solo de n y p, tal que

$$\|R_{m,k}\|_{L^p\to L^p} \leq C_{n,p}\left(m^{n/2} + \|R_{m,k}\|_{L^2\to L^2}\right).$$

Por lo tanto, juntando estas dos últimas desigualdades obtenemos (3.4.8). □

Ahora, si K es el núcleo en (3.1.22), definimos

$$b_{m,k}(x) = \int_{S^{n-1}} K(x,\zeta) Y_{m,k}(\zeta) d\sigma(\zeta),$$

para c. t. p. $x \in \Omega$. De manera análoga al Lema 4.3 en [SS06] se prueba el siguiente lema, por lo que omitimos su demostración.

Lema 3.4.11. *Si K satisface las hipótesis del Teorema 3.1.23, $b_{m,k} \in L^\infty(\Omega)\cap LMO^\beta(\Omega)$ y hay una constante $C > 0$ tal que*

$$\|b_{m,k}\|_\infty + [b_{m,k}]_{LMO^\beta} \leq C(M_1 + M_2) m^{-2n},$$

para todos $m \in \mathbb{N}$ y $k = 1, \ldots, g_m$.

Para $f \in BMO_w^\beta$, denotamos

$$R_{m,k}^{\beta,\eta} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x-y|>\varepsilon} K_{m,k}(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right) f(y) dy,$$

para c. t. p. $x \in \Omega$, con $K_{m,k}$ como en (3.4.7). Entonces, como se prueba el Teorema 2.10 en [CFL91], se obtiene

Lema 3.4.12. *Bajo las hipótesis del Teorema 3.1.23, se tienen*

$$S^{\beta,\eta} f(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} b_{m,k}(x) R_{m,k}^{\beta,\eta} f(x)$$

y

$$S_b^{\beta,\eta}f(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} b_{m,k}(x)R_{m,k,b}^{\beta,\eta}f(x)$$

para $f \in BMO_w^\beta$ *y* $b \in L^\infty(\Omega)\cap LMO^\beta(\Omega)$, *donde la convergencia es en c. t. p.* $x \in \Omega$.

Para probar este lema necesitaremos antes otros resultados. Primera haremos la siguiente observación.

Observación 3.4.13. Para cada $m \in \mathbb{N}$ y $k = 1,\dots,g_m$, consideremos el operador integral singular local $R_{m,k}^{\beta,\eta}$ dado arriba y $b \in LMO^\beta$. En la demostración del Teorema 3.1.21 se ve que, para cada $f \in BMO_w^\beta$,

$$\left[R_{m,k,b}^{\beta,\eta}f\right]_{BMO_w^\beta} \leq CC_{K_{m,k}}^2 [b]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}} [f]_{BMO_w^\beta}$$

para cada σ suficientemente chico, donde $C_{K_{m,k}}$ es como en (3.1.11) y C es independiente de $K_{m,k}$ y f (ver (3.3.52)). Entonces, por las proposiciones 3.4.1 y 3.4.4 deducimos que

$$\left[R_{m,k,b}^{\beta,\eta}f\right]_{BMO_w^\beta} \leq Cm^n [b]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}} [f]_{BMO_w^\beta}.$$

Lema 3.4.14. *Sean T una integral singular β-local como en (3.1.12), $E \subset \Omega$ medible y f una función tal que Tf está definida c. t. p. en Ω con sop$(f) \subset E$. Entonces*

$$Tf = (Tf)\,\chi_{\mathcal{N}_\beta(E)},$$

donde $\mathcal{N}_\beta(E)$ es la unión de todas las bolas en $\mathcal{F}_\beta$ que intersectan a E.

Demostración. Dados $x \in \Omega$ e $y \in E$, si tuvieramos $y \in B_\beta(x)$ entonces $E \cap B_\beta(x) \neq \varnothing$, lo que implica $x \in \mathcal{N}_\beta(E)$. Por lo tanto, si $x \notin \mathcal{N}_\beta(E)$ entonces $E \cap B_\beta(x) = \varnothing$, por lo que

$$\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right) f(y) = 0$$

para todo $y \in \Omega$. De este modo es claro que sop$(Tf) \subset \mathcal{N}_\beta(E)$. □

En [HSV19] se prueba que los operadores tipo integral singular β-local son acotados sobre $L_w^p(\Omega)$ cuando w es un peso A_p^β, con $1 < p < \infty$. Sin embargo, por las técnicas y argumentos usados allí, no es fácil de ver como es la dependencia de las constantes de acotación con las de las condiciones de tamaño y suavidad del núcleo. Para nuestro caso, eso nos interesa cuando $w = 1$. Por tal motivo damos el siguiente lema.

Lema 3.4.15. *Sean T una integral singular β-local como en (3.1.12) cuyo núcleo de C-Z es K y, para $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$. Entonces*

$$\|Tf\|_{L^p(\Omega)} \leq CC_K \|f\|_{L^p(\Omega)},$$

donde C_K es como en el Lema 3.3.1 y C es independiente de K y f.

Demostración. Teniendo en cuenta que

$$\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right)=0$$

cuando $y\notin B_\beta(x)$, y

$$\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right)=1$$

cuando $y\in B_{\beta/2}(x)$, desde (3.1.12) conseguimos

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_\Omega\left|\text{v.p.}\int_\Omega K(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right)f(y)dy\right|^p dx\right)^{1/p}\\
&\le \left(\int_\Omega\left|\int_{B_\beta(x)} K(x-y)\left(\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right)-1\right)f(y)dy\right|^p dx\right)^{1/p}\\
&\quad+\left(\int_\Omega\left|\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}^n}K(x-y)f(y)\chi_\Omega(y)dy\right|^p dx\right)^{1/p}\\
&\le \left(\int_\Omega\left(\int_{B_\beta(x)-B_{\beta/2}(x)}|K(x-y)|\,|f(y)|\,dy\right)^p dx\right)^{1/p}\\
&\quad+\|\text{v.p.}K*(f\chi_\Omega)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

donde, por (3.1.7),

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\left(\int_{B_\beta(x)-B_{\beta/2}(x)}|K(x-y)|\,|f(y)|\,dy\right)^p dx &\le C_K^p\int_\Omega\left(\frac{C_n}{|B_\beta(x)|}\int_{B_\beta(x)}|f(y)|\,dy\right)^p dx\\
&\le C_n^pC_K^p\int_\Omega \mathcal{M}_\beta f(x)^p dx\\
&\le C_{n,p,\beta}C_K^p\int_\Omega|f(x)|^p dx,
\end{aligned}$$

por acotación del operador maximal local $\mathcal{M}_\beta$ sobre $L^p(\Omega)$. Luego, con las desigualdades obtenidas la conclusión es clara. □

Observación 3.4.16. Dados $T^{\beta,\eta}$ integral singular local como en (3.1.12) y $\varepsilon>0$, denotemos $K_\varepsilon=K\chi_{B(0,\varepsilon)^c}$ y

$$T^{\beta,\eta,\varepsilon}f(x)=\int_\Omega K_\varepsilon(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right)f(y)dy,$$

para $x\in\Omega$ y $f\in L^\infty(\Omega)$. Como $\|K_\varepsilon*h\|_p\le C_{K,p}\|h\|_p$ y $|K_\varepsilon|\le|K|$, el Lema 3.4.15 es válido para $T^{\beta,\eta,\varepsilon}$ con las mismas constantes correspondientes a K. De igual manera, el Lema 3.4.14 también vale con $T^{\beta,\eta,\varepsilon}$.

Demostración del Lema 3.4.12. Probaremos solo la expansión en serie para la integral singular local de núcleo variable como en (3.1.22), ya que la expansión para su correspondiente conmutador se deduce directamente de la primera. Como, para c. t. p. $x\in\Omega$, la función $z \mapsto |z|^n K(x,z)$ está en $L^2(S^{n-1})$ y $\{Y_{m,k}\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ k=1,\dots,g_m}$ es un sistema ortonormal completo de $L^2\left(S^{n-1}\right)$, tenemos

$$|z|^n K(x,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} b_{m,k}(x) Y_{m,k}(z').$$

De este modo resulta

$$S^{\beta,\eta} f(x) = \text{v.p.} \int_\Omega \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} b_{m,k}(x) K_{m,k}(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right) f(y)dy$$

para c. t. p. $x\in\Omega$. Ahora, para cada $\varepsilon > 0$, denotamos

$$S^{\beta,\eta,\varepsilon} f(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} b_{m,k}(x) K_{m,k}(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right) f(y)dy.$$

Entonces, ya que la función $y \mapsto \eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right)$ tiene soporte en $B_\beta(x)$ y podemos suponer $\varepsilon < \beta\rho(x)$, por el Lema 3.4.11, (3.4.2) y (3.4.3), obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{g_m} b_{m,k}(x) K_{m,k}(x-y)\chi_{B(x,\varepsilon)^c}(y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right) f(y)\right| \\
\le\ & \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{g_m} |b_{m,k}(x)| \frac{|Y_{m,k}(x-y)|}{|x-y|^n}\chi_{B_\beta(x)-B(x,\varepsilon)}(y)|f(y)| \\
\le\ & \frac{C(M_1+M_2)}{\varepsilon^n}\chi_{B_\beta(x)-B(x,\varepsilon)}(y)|f(y)| \sum_{m=1}^{N} m^{n-2}m^{-2n}m^{\frac{n}{2}-1} \\
<\ & \frac{C(M_1+M_2)}{\varepsilon^n}\chi_{B_\beta(x)-B(x,\varepsilon)}(y)|f(y)| \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{n}{2}-3},
\end{aligned}$$

para cada $N\in\mathbb{N}$, donde

$$\int_\Omega \chi_{B_\beta(x)-B(x,\varepsilon)}(y)|f(y)|dy \le w(B_\beta(x))[f]_{BMO_w^\beta} < \infty.$$

Así, por el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, conseguimos

$$S^{\beta,\eta,\varepsilon} f(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} b_{m,k}(x)\int_{|x-y|>\varepsilon} K_{m,k}(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right) f(y)dy. \tag{3.4.17}$$

Ahora, denotemos

$$R_{m,k}^{\beta,\eta,\varepsilon} f(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} K_{m,k}(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right) f(y)dy$$

y veamos que

$$S^{\beta,\eta} f = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} b_{m,k}\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+} R_{m,k}^{\beta,\eta,\varepsilon} f\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} b_{m,k} R_{m,k}^{\beta,\eta} f$$

en el sentido de $L^p(\Omega)$, para $1 \le p < \infty$ y $f \in \mathcal{C}_c^2(\Omega)$. Para empezar, tomemos $0 < \delta < \varepsilon$ y $f \in \mathcal{C}_c^2(\Omega)$. Por (3.1.14), sabemos que

$$\int_{\delta<|x-y|\le\varepsilon} K_{m,k}(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right) dy = 0$$

para cada $x \in \Omega$. Entonces

$$\begin{aligned} R_{m,k}^{\beta,\eta,\varepsilon} f(x) - R_{m,k}^{\beta,\eta,\delta} f(x) &= \int_{\delta<|x-y|\le\varepsilon} K_{m,k}(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right) f(y)dy \\ &\quad - \int_{\delta<|x-y|\le\varepsilon} K_{m,k}(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right) f(x)dy \end{aligned}$$

y luego, por el teorema del valor medio y la desigualdad de Schwartz, resulta

$$\begin{aligned} \left| R_{m,k}^{\beta,\eta,\varepsilon} f(x) - R_{m,k}^{\beta,\eta,\delta} f(x) \right| &\le \int_{\delta<|x-y|\le\varepsilon} |K_{m,k}(x-y)|\,|f(y)-f(x)|dy \\ &\le C m^{\frac{n}{2}-1} \|Df\|_\infty \int_{\delta<|x-y|\le\varepsilon} |x-y|^{-n+1} dy \\ &\le C|S^{n-1}| m^{\frac{n}{2}-1} \|Df\|_\infty (\varepsilon-\delta), \end{aligned}$$

donde además aplicamos (3.4.7) y (3.4.3). Así, por (3.4.17) y el Lema 3.4.14 obtenemos

$$\begin{aligned} &\left\| S^{\beta,\eta,\varepsilon} f - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} b_{m,k} R_{m,k}^{\beta,\eta} f \right\|_{L^p(\Omega)} \\ \le\ & \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} \|b_{m,k}\|_\infty \left\| R_{m,k}^{\beta,\eta,\varepsilon} f - R_{m,k}^{\beta,\eta} f \right\|_{L^p\left(\mathcal{N}_\beta(\mathrm{sop}(f))\right)} \\ \le\ & \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} \|b_{m,k}\|_\infty \lim_{\delta\to 0^+} \left\| R_{m,k}^{\beta,\eta,\varepsilon} f - R_{m,k}^{\beta,\eta,\delta} f \right\|_{L^p\left(\mathcal{N}_\beta(\mathrm{sop}(f))\right)} \\ \le\ & \varepsilon C \|Df\|_\infty |\mathcal{N}_\beta(\mathrm{sop}(f))|^{1/p} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{n}{2}-3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$S^{\beta,\eta} f = \lim_{\varepsilon\to 0^+} S^{\beta,\eta,\varepsilon} f = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} b_{m,k} R_{m,k}^{\beta,\eta} f \qquad (3.4.18)$$

en $L^p(\Omega)$, para toda $f \in \mathcal{C}_c^2(\Omega)$. Ahora, por el argumento usual de densidad, extendemos $S^{\beta,\eta}$ sobre $L^p(\Omega)$. Sea $f \in L^p(\Omega)$ y tomemos $\{f_h\}$ y $\{g_h\}$, sucesiones en $\mathcal{C}_c^2(\Omega)$, tales que

$$\lim_{h\to\infty} \|f - f_h\|_{L^p(\Omega)} = 0$$

y

$$\lim_{h\to\infty} \|f - g_h\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Entonces, por (3.4.18), (3.4.8) y el Lema 3.4.15, por un lado tenemos

$$\begin{aligned}
&\left\|S^{\beta,\eta} f_h - S^{\beta,\eta} g_h\right\|_{L^p(\Omega)} \\
\leq\ & \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} \|b_{m,k}\|_\infty \left\|R_{m,k}^{\beta,\eta} f_h - R_{m,k}^{\beta,\eta} g_h\right\|_{L^p(\Omega)} \\
\leq\ & \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} \|b_{m,k}\|_\infty C C_{K_{m,k}} \|f_h - g_h\|_{L^p(\Omega)} \\
\leq\ & C\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{n}{2}-2}\right)\|f_h - g_h\|_{L^p(\Omega)},
\end{aligned}$$

por lo que

$$\lim_{h\to\infty} \left\|S^{\beta,\eta} g_h - S^{\beta,\eta} f_h\right\|_{L^p(\Omega)} = 0,$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned}
&\left\|S^{\beta,\eta} f_i - S^{\beta,\eta} f_h\right\|_{L^p(\Omega)} \\
\leq\ & \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} \|b_{m,k}\|_\infty \left\|R_{m,k}^{\beta,\eta} f_i - R_{m,k}^{\beta,\eta} f_h\right\|_{L^p(\Omega)} \\
\leq\ & \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} \|b_{m,k}\|_\infty C C_{K_{m,k}} \|f_i - f_h\|_{L^p(\Omega)} \\
\leq\ & C\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{n}{2}-2}\right)\|f_i - f_h\|_{L^p(\Omega)},
\end{aligned}$$

para todos $h, i \in \mathbb{N}$, por lo cual $\left\{S^{\beta,\eta} f_h\right\}$ es de Cauchy en $L^p(\Omega)$ y podemos definir

$$S^{\beta,\eta} f = \lim_{h\to\infty} S^{\beta,\eta} f_h \tag{3.4.19}$$

en el sentido de $L^p(\Omega)$. Ahora, consideramos $f \in BMO_w^\beta$ y $\mathcal{W} = \{P_j\} \subset \mathcal{F}_{\beta/85} - \mathcal{F}_{\beta/340}$ un cubrimiento tipo Whitney como el de la Observación 3.2.4. Fijamos $P_j \in \mathcal{W}$ y denotamos $f_j = f\chi_{\mathcal{S}_\beta(P_j)}$. Por la Observación 3.1.13, $f_j \in L^p(\Omega)$ con $1 < p < \infty$. Luego, podemos tomar $\{f_{j,h}\}_{h\in\mathbb{N}}$, sucesión de funciones en $\mathcal{C}_c^2(\Omega)$, tal que

$$\lim_{h\to\infty} \|f_j - f_{j,h}\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Por un lado, por (3.4.18), (3.4.8) y el Lema 3.4.15, tenemos

$$\begin{aligned}
&\left\|S^{\beta,\eta} f_{j,h} - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} b_{m,k} R_{m,k}^{\beta,\eta} f_j\right\|_{L^p(\Omega)} \\
\leq\ & \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} \|b_{m,k}\|_\infty \left\|R_{m,k}^{\beta,\eta} f_{j,h} - R_{m,k}^{\beta,\eta} f_j\right\|_{L^p(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} \|b_{m,k}\|_\infty CC_{K_{m,k}} \|f_{j,h} - f_j\|_{L^p(\Omega)}$$
$$\leq C\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{n}{2}-2}\right) \|f_{j,h} - f_j\|_{L^p(\Omega)},$$

para cada $h \in \mathbb{N}$. Por otro lado, por (3.4.19), $S^{\beta,\eta}f_j$ está bien definida como función de $L^p(\Omega)$ y además

$$\left\|S^{\beta,\eta}f_j - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} b_{m,k}R^{\beta,\eta}_{m,k}f_j\right\|_{L^p(\Omega)} \leq \left\|S^{\beta,\eta}f_j - S^{\beta,\eta}f_{j,h}\right\|_{L^p(\Omega)} + \left\|S^{\beta,\eta}f_{j,h} - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} b_{m,k}R^{\beta,\eta}_{m,k}f_j\right\|_{L^p(\Omega)}$$

donde el lado derecho de la desigualdad anterior tiende a 0 cuando h tiende a ∞. De este modo se deduce

$$S^{\beta,\eta}f_j = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} b_{m,k}R^{\beta,\eta}_{m,k}f_j$$

en $L^p(\Omega)$, por lo que la igualdad también vale en c. t. p. de Ω. Por último, por los mismos argumentos usados en la Observación 3.1.13 para probar (3.1.15), obtenemos

$$S^{\beta,\eta}f = S^{\beta,\eta}f_j = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} b_{m,k}R^{\beta,\eta}_{m,k}f_j = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m} b_{m,k}R^{\beta,\eta}_{m,k}f$$

en c. t. p. de P_j, para cada j, con lo que concluimos la demostración. □

También será útil el lema siguiente.

Lema 3.4.20. *Si $w \in A_1^\beta$, para todos $f \in BMO_w^\beta$ y $g \in L^\infty \cap LMO^\beta$, tenemos $fg \in BMO_w^\beta$. Más aún, hay una constante C, independiente de f y g, verificando*

$$[fg]_{BMO_w^\beta} \leq C[f]_{BMO_w^\beta}\left(\|g\|_\infty + [g]_{LMO^\beta}\right).$$

Demostración. Por un lado, si $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\beta/2}$ resulta

$$\int_B |fg|dx \leq \|g\|_\infty w(B)[f]_{BMO_w^\beta}.$$

Por otro lado, tomemos $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_{\beta/2}$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$2^{k_0}r \leq \beta\rho(\xi) < 2^{k_0+1}r.$$

Entonces, ya que $w \in A_1^\beta$ tenemos

$$\int_B |f|dx \leq \int_B |f - f_B|dx + |B|\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{|2^kB|}\int_{2^kB}|f - f_{2^{k+1}B}|dx + |B|\,|f_{2^{k_0}B}|$$

$$\begin{aligned}
&\leq w(B)[f]_{BMO_w^\beta}+2^n|B|[f]_{BMO_w^\beta}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{w(2^{k+1}B)}{|2^{k+1}B|}\\
&\quad +2^n\frac{|B|}{|2^{k_0+1}B|}\int_{B_\beta(\xi)}|f|dx\\
&\leq w(B)[f]_{BMO_w^\beta}+C(k_0-1)w(B)[f]_{BMO_w^\beta}\\
&\quad +2^n\frac{|B|w(B_\beta(\xi))}{|B_\beta(\xi)|}[f]_{BMO_w^\beta}\\
&\leq Ck_0w(B)[f]_{BMO_w^\beta}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, ya que $k_0\log 2\leq \log\frac{\beta\rho(\xi)}{r}$, resulta

$$\begin{aligned}
\int_B|fg-f_Bg_B|\,dx &\leq \int_B|g||f-f_B|dx+|f_B|\int_B|g-g_B|dx\\
&\leq \left(\|g\|_\infty+\frac{Ck_0}{|B|}\int_B|g-g_B|dx\right)w(B)[f]_{BMO_w^\beta}\\
&\leq \left(\|g\|_\infty+\frac{C\log\frac{\beta\rho(\xi)}{r}}{|B|}\int_B|g-g_B|dx\right)w(B)[f]_{BMO_w^\beta}\\
&\leq C\left(\|g\|_\infty+[g]_{LMO^\beta}\right)w(B)[f]_{BMO_w^\beta},
\end{aligned}$$

con lo cual podemos concluir la demostración. □

Demostración del Teorema 3.1.23. Sean $\lambda\in(0,1-\beta)$, $\theta\leq\text{mín}\left\{\frac{1}{10},\frac{\lambda}{\beta^2+\beta}\right\}$ y $B\in\mathcal{F}_{\theta\beta}$ cuyo centro es ξ. Primero probemos que las series

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m}\int_B b_{m,k}(x)R_{m,k}^{\beta,\eta}f(x)dx$$

y

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m}\int_B b_{m,k}(x)R_{m,k,b}^{\beta,\eta}f(x)dx$$

convergen para $f\in BMO_w^\beta$. Ya que, por el Lema 3.3.2, $\mathcal{S}_\beta(B)\subset B_{\beta+\lambda}(\xi)$, si tomamos $g\in BMO_w^\beta$ y algún $p>1$ y suficientemente cercano a 1, por los Lemas 3.3.1 y 3.2.23 junto con (3.4.3) y (3.4.8) tenemos

$$\begin{aligned}
\int_B\left|R_{m,k}^{\beta,\eta}g\right|dx &\leq CC_{K_{m,k}}\left(\left\|g\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right\|_p\|\chi_B\|_{p'}+\frac{\|\chi_B\|_1\left\|g\chi_{\mathcal{S}_\beta(B)}\right\|_1}{|B_\beta(\xi)|}\right)\\
&\leq Cm^{n/2}\left(\left\|g\chi_{B_{\beta+\lambda}(\xi)}\right\|_p\left\|\chi_{B_{\beta+\lambda}(\xi)}\right\|_{p'}+\left\|g\chi_{B_{\beta+\lambda}(\xi)}\right\|_1\right)\\
&\leq Cm^{n/2}w(B_{\beta+\lambda}(\xi))\left([g]_{BMO_{w,p}^{\beta+\lambda}}+[g]_{BMO_w^{\beta+\lambda}}\right)\\
&\leq Cm^{n/2}w(B_{\beta+\lambda}(\xi))[g]_{BMO_w^\beta}.
\end{aligned}$$

Entonces, aplicando la desigualdad anterior a f y bf, por el Lema 3.4.20, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_B \left|R^{\beta,\eta}_{m,k,b}f(x)\right| dx &\leq \int_B \left|b(x)R^{\beta,\eta}_{m,k}f(x)\right| dx + \int_B \left|R^{\beta,\eta}_{m,k}(bf)(x)\right| dx \\ &\leq Cm^{n/2}w(B_{\beta+\lambda}(\xi))\left(\|b\|_\infty [f]_{BMO^\beta_w} + [bf]_{BMO^\beta_w}\right) \\ &\leq Cm^{n/2}w(B_{\beta+\lambda}(\xi))\left(\|b\|_\infty + [b]_{LMO^\beta}\right)[f]_{BMO^\beta_w}.\end{aligned}$$

De este modo, para cada $N \in \mathbb{N}$, resulta

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{N}\left|\sum_{k=1}^{g_m}\int_B b_{m,k}(x)R^{\beta,\eta}_{m,k,b}f(x)dx\right| \\ \leq\ & \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{g_m}\|b_{m,k}\|_\infty \int_B \left|R^{\beta,\eta}_{m,k,b}f(x)\right| dx \\ \leq\ & C\left(\|b\|_\infty + [b]_{LMO^\beta}\right)[f]_{BMO^\beta_w}\ w\left(B_{\beta+\lambda}(\xi)\right)\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{n}{2}-2},\end{aligned}$$

por lo cual

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{g_m}\int_B b_{m,k}(x)R^{\beta,\eta}_{m,k,b}f(x)dx\right| < \infty.$$

De igual manera se ve que

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{g_m}\int_B b_{m,k}(x)R^{\beta,\eta}_{m,k}f(x)dx\right| < \infty.$$

Ahora, siendo B como antes, por los Lemas 3.4.12, 3.4.20 y 3.4.11, (3.4.2), el Teorema 3.1.21 y la Observación 3.4.13, obtenemos

$$\begin{aligned}&\int_B \left|S^{\beta,\eta}_b f - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m}\left(b_{m,k}R^{\beta,\eta}_{m,k,b}f\ \right)_B\right| dy \\ \leq\ & \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m}\int_B \left|b_{m,k}R^{\beta,\eta}_{m,k,b}f - \left(b_{m,k}R^{\beta,\eta}_{m,k,b}f\right)_B\right| dy \\ \leq\ & Cw(B)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m}\left(\|b_{m,k}\|_\infty + [b_{m,k}]_{LMO^\beta}\right)\left[R^{\beta,\eta}_{m,k,b}f\right]_{BMO^\beta_w} \\ \leq\ & C(M_1+M_2)w(B)\sum_{m=1}^{\infty} g_m m^{-2n} m^n\, [b]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}}\, [f]_{BMO^\beta_w} \\ \leq\ & C(M_1+M_2)w(B)\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-2}\right)[b]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}}\,[f]_{BMO^\beta_w}.\end{aligned}$$

De igual manera, para $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\theta\beta}$ se consigue

$$\int_B \left|S^{\beta,\eta}_b f\right| dy \leq w(B)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{g_m}\left[b_{m,k}R^{\beta,\eta}_{m,k,b}f\right]_{BMO^\beta_w}$$

$$\leq \; C(M_1+M_2)w(B)\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-2}\right)[b]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}}\,[f]_{BMO_w^\beta}\,.$$

Por lo tanto, deducimos que

$$\left[S_b^{\beta,\eta} f\right]_{BMO_w^\beta} \leq C[b]_{LMO^{\beta+\sqrt{n}\sigma}}[f]_{BMO_w^\beta}.$$

De igual manera se obtiene también

$$\left[S^{\beta,\eta} f\right]_{BMO_w^\beta} \leq C[f]_{BMO_w^\beta}.$$

□

3.5. Estimación para derivadas de segundo orden

En esta sección, y de ahora en adelante, supondremos que Ω es un dominio acotado y $n \geq 3$. Como en [SS06] y [CFL91], consideramos el operador elíptico L definido por

$$Lu(x) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \tag{3.5.1}$$

en c. t. p. de $\mathbb{R}^n$, donde los coeficientes $a_{i,j}$ satisfacen las siguientes propiedades:

$$a_{i,j} = a_{j,i} \tag{3.5.2}$$

para todos i, j, y hay una constante $\nu \in (0,1]$ tal que

$$\nu|\xi|^2 \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \leq \nu^{-1}|\xi|^2, \tag{3.5.3}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ y c. t. p. $x \in \mathbb{R}^n$. Además, supondremos $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)\cap LMO^\beta(\Omega)$ y

$$\max_{1\leq i,j\leq n}\left(\|a_{i,j}\|_\infty + [a_{i,j}]_{LMO^\beta}\right) \leq \nu^{-1}. \tag{3.5.4}$$

El resultado principal de esta sección es el siguiente.

Teorema 3.5.5. *Sea L el operador elíptico definido en (3.5.1) con coeficientes $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)\cap LMO_0^\beta(\Omega)$ (ver Definición 3.5.21). Consideremos, además Ω' abierto tal que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ y $w \in A_1^\beta(\Omega')$. Entonces, existe $C > 0$ tal que, si $u \in W_{loc}^{2,p}(\Omega)$, para algún $p \in (1,\infty)$, y $D^\alpha u \in BMO_w^\beta(\Omega')$ para cada multi-índice α con $|\alpha| \leq 2$, se tiene*

$$\left[D^2 u\right]_{BMO_w^\beta(\Omega')} \leq C\left([u]_{BMO_w^\beta(\Omega')} + \sum_{i=1}^{n}[D_i u]_{BMO_w^\beta(\Omega')} + [Lu]_{BMO_w^\beta(\Omega')}\right),$$

donde $D^2u = \sum_{1\leq i,j\leq n}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right|$, $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ y C depende de β, w, n, ν, Ω', Ω y los coeficientes $a_{i,j}$.

Observación 3.5.6. En el teorema anterior pedimos $u \in W^{2,1}_{loc}(\Omega)$ para aplicar directamente el Teorema 1.0.25 (fórmula de representación para las derivadas de segundo orden), ya que si una función está en $BMO^{\beta}_{w}(\Omega)$ eso no implica que esté en $BMO^{\beta}_{w}(\Omega')$.

Para la demostración del Teorema 3.5.5 recordaremos y demostraremos algunos resultados necesarios. Sea Γ la función sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que, para c. t. p. x_0, la aplicación $y \longmapsto \Gamma(x_0, y)$ es la solución fundamental de $L_{x_0} = \sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j}(x_0)\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}$. Denotemos también

$$\Gamma_i(x,y) = \frac{\partial \Gamma}{\partial y_i}(x,y), \quad \Gamma_{i,j}(x,y) = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y_i \partial y_j}(x,y).$$

Es sabido que las derivadas $\Gamma_{i,j}(x,y)$ son núcleos de C-Z en la variable y. Más aún, como en [SS06] se tiene lo siguiente:

Lema 3.5.7. *Las funciones $\Gamma_{i,j}(x,y)$ satisfacen las condiciones pedidas para los núcleos en el Teorema 3.1.23, donde las constantes M_1 y M_2 dependen de n, ν, y β.*

Para probar este lema como en [SS06], necesitamos antes obtener otros resultados sobre funciones en LMO^{β}.

Proposición 3.5.8. *Sean f y g en $LMO^{\beta}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$. Entonces, $fg \in LMO^{\beta}(\Omega)$ y además*

$$[fg]_{LMO^{\beta}} \le 2\left(\|f\|_{\infty}[g]_{LMO^{\beta}} + \|g\|_{\infty}[f]_{LMO^{\beta}}\right).$$

Demostración. Si $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_{\beta}$ tenemos

$$\begin{aligned}\int_B |fg - f_B g_B|dx &\le \int_B |fg - fg_B|dx + \int_B |fg_B - f_B g_B|dx \\ &\le \|f\|_{\infty}\int_B |g - g_B|dx + \|g\|_{\infty}\int_B |f - f_B|dx,\end{aligned}$$

y luego

$$\begin{aligned}\int_B |fg - (fg)_B|dx &\le 2\int_B |fg - f_B g_B|dx \\ &\le 2\left(\|f\|_{\infty}\int_B |g - g_B|dx + \|g\|_{\infty}\int_B |f - f_B|dx\right) \\ &\le \frac{2|B|}{1 + \log\frac{\beta\rho(\xi)}{r}}\left(\|f\|_{\infty}[g]_{LMO^{\beta}} + \|g\|_{\infty}[f]_{LMO^{\beta}}\right).\end{aligned}$$

□

Ahora daremos una generalización de la proposición anterior. Para ello, denotamos

$$\|f\|_{LMO^{\beta,\infty}} = \|f\|_{\infty} + [f]_{LMO^{\beta}}$$

si $f \in LMO^{\beta}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$.

Proposición 3.5.9. *Sean f_1, f_2, $\ldots$, f_k en $LMO^\beta(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Entonces*

$$[f_1 f_2 \ldots f_k]_{LMO^\beta} \leq \left(\sum_{j=1}^{k-1} 2^j\right) \|f_1\|_{LMO^{\beta,\infty}} \|f_2\|_{LMO^{\beta,\infty}} \ldots \|f_k\|_{LMO^{\beta,\infty}} . \tag{3.5.10}$$

Demostración. El caso para $k=2$ se deduce directamente de la proposición anterior. Inductivamente, supongamos que vale (3.5.10) con $k=m>2$. Entonces, por la proposición anterior

$$\begin{aligned}
& [f_1 \ldots f_m f_{m+1}]_{LMO^\beta} \\
\leq\ & 2\|f_1 \ldots f_m\|_{LMO^{\beta,\infty}} \|f_{m+1}\|_{LMO^{\beta,\infty}} \\
\leq\ & 2\left(\|f_1 \ldots f_m\|_\infty + \left(\sum_{j=1}^{m-1} 2^j\right) \|f_1\|_{LMO^{\beta,\infty}} \ldots \|f_m\|_{LMO^{\beta,\infty}}\right) \|f_{m+1}\|_{LMO^{\beta,\infty}} \\
\leq\ & 2\left(\|f_1\|_\infty \ldots \|f_m\|_\infty + \left(\sum_{j=1}^{m-1} 2^j\right) \|f_1\|_{LMO^{\beta,\infty}} \ldots \|f_m\|_{LMO^{\beta,\infty}}\right) \|f_{m+1}\|_{LMO^{\beta,\infty}} \\
\leq\ & \left(2+\sum_{j=1}^{m-1} 2^{j+1}\right) \|f_1\|_{LMO^{\beta,\infty}} \ldots \|f_m\|_{LMO^{\beta,\infty}} \|f_{m+1}\|_{LMO^{\beta,\infty}} \\
=\ & \left(\sum_{j=1}^{m} 2^j\right) \|f_1\|_{LMO^{\beta,\infty}} \ldots \|f_m\|_{LMO^{\beta,\infty}} \|f_{m+1}\|_{LMO^{\beta,\infty}} .
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.5.11. *Sean $f\in LMO^\beta(\Omega)$ y $c>0$ tales que $f\geq c$ en c. t. p. de Ω. Entonces, $1/f$ y $f^{1/2}$ están en LMO^β. Más aún,*

$$[1/f]_{LMO^\beta} \leq 2c^{-2}[f]_{LMO^\beta} ,$$

y

$$\left[f^{1/2}\right]_{LMO^\beta} \leq c^{-1/2}[f]_{LMO^\beta} .$$

Demostración. Sea $B\in\mathcal{F}_\beta$. Ya que $|f_B|=f_B\geq c$, por un lado tenemos

$$\int_B \left|\frac{1}{f}-\frac{1}{f_B}\right| dx = \int_B \left|\frac{f_B-f}{f_B f}\right| dx \leq c^{-2}\int_B |f-f_B|dx.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\int_B |f-f_B|dx &= \int_B \left|\left(f^{1/2}\right)^2 - \left((f_B)^{1/2}\right)^2\right| dx \\
&= \int_B \left|f^{1/2}-(f_B)^{1/2}\right| \left(f^{1/2}+(f_B)^{1/2}\right) dx \\
&\geq 2c^{1/2}\int_B \left|f^{1/2}-(f_B)^{1/2}\right| dx.
\end{aligned}$$

Luego, las estimaciones buscadas surgen fácilmente. □

Ahora, buscamos aplicar las estimaciones anteriores a las derivaciones parciales de segundo orden de $\Gamma(\cdot, y)$ cuando ésta se expresa en la forma dada en [CFL91] y [SS06], a saber

$$\Gamma(x,y) = \frac{1}{(n-2)|S^n|(\det a(x))^{1/2}} \left(\sum_{1\le i,j\le n} \left(a^{-1}\right)_{i,j}(x) y_i y_j \right)^{\frac{2-n}{2}}, \tag{3.5.12}$$

donde $a = (a_{i,j})$, $a^{-1} = \left(\left(a^{-1}\right)_{i,j}\right)$ y $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ (recordar que $n > 2$). Por tal motivo, y dadas las condiciones que verifica la matriz a, consideramos ciertas definiciones y resultados sobre la teoría de matrices en el Álgebra Lineal. Las siguientes notas se pueden obtener en [Sha15].

Definición 3.5.13. *Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es diagonalizable si hay una matriz $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.*

Cuando A es diagonalizable, los elementos de la diagonal de $P^{-1}AP$ son los *autovalores* de A: estos son los números $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que hay un vector $v \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ que verifica $Av = \lambda v$. Tal vector es un *autovector* correspondiente a λ. Recordamos también que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor si y solo si $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Además, en nuestro caso ($\mathbb{C}^{n\times n}$) todas las matrices son diagonalizables.

Definición 3.5.14. *$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es hermitiana si $A = \overline{A}^T$, es decir, A coincide con la transpuesta de su conjugada.*

El siguiente hecho nos servirá para demostrar el Lema 3.5.7. La versión más fuerte es el Teorema 6.9 en [Sha15].

Proposición 3.5.15. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es hermitiana todos sus autovalores son números reales.*

El siguiente resultado sigue del Teorema 6.15 en [Sha15].

Proposición 3.5.16. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es hermitiana, con λ_1 y λ_n el menor y el mayor de sus autovalores, respectivamente, entonces*

$$[\lambda_1, \lambda_n] = \left\{ \overline{v}^T A v : |v| = 1 \right\},$$

y en particular

$$\lambda_1 |v|^2 \le \overline{v}^T A v \le \lambda_n |v|^2,$$

para todo $v \in \mathbb{C}^n - \{0\}$.

Definición 3.5.17. *Se dice que una matriz hermitiana $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es definida positiva si $\overline{v}^T A v > 0$, para todo $v \in \mathbb{C}^n - \{0\}$.*

La versión más fuerte de la proposición siguiente es el Teorema 6.25 en [Sha15].

Proposición 3.5.18. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es hermitiana entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) A es definida positiva.

(ii) Todos los autovalores de A son positivos.

(iii) Hay una $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible tal que $A = \overline{P}^T P$.

Ahora podemos probar el Lema 3.5.7.

Demostración del Lema 3.5.7. Primero vemos que $\det a \in LMO^{\beta}$. Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, de (1.7) en la página 11 de [Sha15], es claro que $\det A$ es una suma con signos alternados de productos de n componentes distintas de A. De este modo, deducimos que

$$[\det a]_{LMO^{\beta}} \leq \sum_{(i_1,j_1)\dots(i_n,j_n)} [a_{i_1,j_1}\dots a_{i_n,j_n}]_{LMO^{\beta}}$$

donde la suma se toma sobre todos los pares ordenados (i_k, j_k), con $k = 1, \dots, n$ y $1 \leq i_k, j_k \leq n$, distintos entre sí (en realidad, la suma podría tomarse entre menos productos de componentes de la matriz a). Ya que hay a lo sumo

$$\begin{pmatrix} n^2 \\ n \end{pmatrix} = \frac{(n^2)!}{n!\,(n^2-n)!}$$

términos, por (3.5.10) y (3.5.4) tenemos

$$\begin{aligned} [\det a]_{LMO^{\beta}} &\leq \sum_{(i_1,j_1)\dots(i_n,j_n)} \left(\sum_{j=1}^{n-1} 2^j\right) \|a_{i_1,j_1}\|_{LMO^{\beta,\infty}} \dots \|a_{i_n,j_n}\|_{LMO^{\beta,\infty}} \\ &\leq \frac{(n^2)!}{n!\,(n^2-n)!} \left(\sum_{j=1}^{n-1} 2^j\right) \nu^{-n}. \end{aligned} \tag{3.5.19}$$

Ahora, fijemos $x \in \mathbb{R}^n$ y $a(x) = a$. Por (3.5.2) a es hermitiana y, por (3.5.3), sabemos que a tiene autovalores λ_1, …, λ_n en $\mathbb{R}$ (y además positivos). Sea λ uno de estos autovalores y u un correspondiente autovector. Como el sistema de ecuaciones lineales

$$(a - \lambda I_n)\, y = 0$$

tiene soluciones no triviales en $\mathbb{R}^n$ ($\det(a - \lambda I_n) = 0$), sabemos que $u \in \mathbb{R}^n$. Luego, por (3.5.3) resulta

$$\lambda |u|^2 = \lambda u^T u = u^T a u \geq \nu |u|^2.$$

De este modo, para cada $k = 1$, …, n, $\lambda_k \geq \nu$. Entonces, ya que hay una matriz P inversible tal que $P^{-1}aP$ es diagonal y los elementos de la diagonal son λ_1, …, λ_n, conseguimos

$$\det a = \det\left(P^{-1}aP\right) = \lambda_1 \dots \lambda_n \geq \nu^n.$$

Por lo tanto, podemos aplicar la Proposición 3.5.11 y deducimos que $(\det a)^{1/2}$ y, luego, $(\det a)^{-1/2}$ están en LMO^{β}. Ahora, por un lado, queremos ver que, para cada $k, l = 1, \ldots, n$, $(a^{-1})_{k,l} \in L^{\infty} \cap LMO^{\beta}$. Denotemos $a(i|j)$ a la matriz que se obtiene de a suprimiendo la i-ésima fila de a y la j-ésima columna. Entonces

$$(a^{-1})_{k,l} = \frac{(-1)^{l+k} \det a(l|k)}{\det a},$$

por lo que

$$\left\|(a^{-1})_{k,l}\right\|_{\infty} \leq \nu^{-n} \left\|\det a(l|k)\right\|_{\infty}$$

y, por la Proposición 3.5.9,

$$\left[(a^{-1})_{k,l}\right]_{LMO^{\beta}} \leq 2 \left\|\det a(l|k)\right\|_{LMO^{\beta,\infty}} \left\|(\det a)^{-1}\right\|_{LMO^{\beta,\infty}},$$

donde

$$\left\|(\det a)^{-1}\right\|_{LMO^{\beta,\infty}} \leq \nu^{-n} + 2\nu^{-2n} \left[\det a\right]_{LMO^{\beta}} \leq \nu^{-n} + 2C_n \nu^{-3n},$$

por (3.5.19) y la Proposición 3.5.11. Ahora, como las componentes de $a(l|k)$ son componentes de la matriz a, es claro que

$$\left\|\det a(l|k)\right\|_{LMO^{\beta,\infty}} \leq \sum_{(i_1,j_1)\ldots(i_n,j_n)} \left\|a_{i_1,j_1} \ldots a_{i_n,j_n}\right\|_{LMO^{\beta,\infty}} \leq C_n \nu^{-n},$$

donde la suma se toma sobre todos los pares ordenados (i_k, j_k), con $k = 1, \ldots, n$ y $1 \leq i_k, j_k \leq n$, distintos entre sí. Así, hay una constante $C_{n,\nu}$, que depende solo de n y ν, verificando

$$\left\|(a^{-1})_{k,l}\right\|_{LMO^{\beta,\infty}} \leq C_{n,\nu} \tag{3.5.20}$$

para todos $k, l = 1, \ldots, n$. Por otro lado, de (3.5.2), (3.5.3) y la Proposición 3.5.18, sabemos que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, hay una matriz $Q(x) = Q$ inversible tal que $a = Q^T Q$. Por lo tanto, ya que

$$a^{-1} = Q^{-1} \left(Q^T\right)^{-1} = \left(\left(Q^{-1}\right)^T\right)^T \left(Q^{-1}\right)^T$$

siendo $\left(Q^{-1}\right)^T$ inversible, deducimos que a^{-1} es definida positiva, por la Proposición 3.5.18. Más aún, veamos que a^{-1} satisface (3.5.3). Supongamos que los autovalores de a están ordenados de la forma

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n.$$

Si λ es uno de estos autovalores y u un correspondiente autovector, por (3.5.3) resulta

$$\lambda |u|^2 = \lambda u^T u = u^T a u \leq \nu^{-1} |u|^2.$$

De este modo, para cada $k = 1, \ldots, n$, $\lambda_k \leq \nu^{-1}$. Entonces, ya que $\lambda_n^{-1}, \lambda_{n-1}^{-1}, \ldots, \lambda_1^{-1}$ son los autovalores de a^{-1}, por la proposición 3.5.16 obtenemos

$$\nu |\xi|^2 \leq \lambda_n^{-1} |\xi|^2 \leq \xi^T a^{-1} \xi \leq \lambda_1^{-1} |\xi|^2 \leq \nu^{-1} |\xi|^2,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ (notar que en realidad $a^{-1} = a^{-1}(x)$, para c. t. p. $x \in \mathbb{R}^n$, por lo que $\lambda_k = \lambda_k(x)$, pero ν es independiente de x). Finalmente, el resto de la demostración sigue como la del Lema 5.5 en [SS06]. $\square$

Para los coeficientes del operador diferencial en (3.5.1), además de las hipótesis ya pedidas, desearemos que estos estén en un subespacio de LMO^β.

Definición 3.5.21. *Para $f \in LMO^\beta$ y $0 < \sigma \leq \beta$ definimos*

$$\Psi^\beta(f,\sigma) = \sup_{B(\xi,r)\in\mathcal{F}_\sigma} \frac{1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{r}}{|B(\xi,r)|}\int_{B(\xi,r)} |f(x) - f_{B(\xi,r)}|dx. \tag{3.5.22}$$

Decimos que f es una función de LMO_0^β, y escribimos $f \in LMO_0^\beta$, si

$$\lim_{\sigma\to 0^+} \Psi^\beta(f,\sigma) = 0.$$

Observación 3.5.23. Es trivial que $LMO_0^\beta = LMO_0^\gamma$ para todos β,γ en $(0,1)$. Además, si $\alpha \in (0,1]$ tenemos $Lip_\alpha\left(\overline{\Omega}\right) \subset LMO_0^\beta$. En efecto, consideremos la función

$$h(t) = \left(1 + \log\frac{1}{t}\right)t^\alpha$$

con $0 < t < e^{1-1/\alpha}$. Por un lado tenemos

$$\begin{aligned} h'(t) &= t(-t^{-2})t^\alpha + \alpha t^{\alpha-1}\left(1+\log\frac{1}{t}\right) \\ &= t^{\alpha-1}\left(\alpha\left(1+\log\frac{1}{t}\right) - 1\right) \end{aligned}$$

siendo $\alpha\left(1+\log\frac{1}{t}\right) - 1 > 0$ en el dominio considerado para t. De este modo, h es creciente en $\left(0, e^{1-1/\alpha}\right)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} h(t) &= \lim_{t\to 0^+}\frac{1+\log\frac{1}{t}}{t^{-\alpha}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{t(-t^{-2})}{(-\alpha)t^{-\alpha-1}} \\ &= \frac{1}{\alpha}\lim_{t\to 0^+} t^\alpha = 0. \end{aligned}$$

Entonces, si $0 < \sigma \leq \min\left\{\beta, e^{1-1/\alpha}\right\}$, $f \in Lip_\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$ y $B = B(\xi,r) \in \mathcal{F}_\sigma$, como $\frac{r}{\rho(\xi)} \leq \sigma < e^{1-1/\alpha}$, se sigue

$$\begin{aligned} \frac{1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{r}}{|B|}\int_B |f - f_B|\,dx &\leq \frac{1+\log\frac{\rho(\xi)}{r}}{|B|^2}\int_B\int_B |f(x)-f(y)|\,dydx \\ &\leq \left(1+\log\frac{\rho(\xi)}{r}\right)(2r)^\alpha[f]_{Lip_\alpha} \\ &\leq (2\rho(\xi))^\alpha\left(1+\log\frac{1}{r/\rho(\xi)}\right)(r/\rho(\xi))^\alpha[f]_{Lip_\alpha} \\ &\leq (2\rho(\xi))^\alpha\left(1+\log\frac{1}{\sigma}\right)\sigma^\alpha[f]_{Lip_\alpha}, \end{aligned} \tag{3.5.24}$$

por lo cual

$$\Psi^\beta(f,\sigma) \leq (2\mathrm{diam}(\Omega))^\alpha h(\sigma)\,[f]_{Lip_\alpha},$$

para $\sigma \in \left(0, \text{mín}\left\{\beta, e^{1-1/\alpha}\right\}\right)$, siendo $\text{diam}(\Omega) = \sup_{x,y\in\Omega} |x-y|$. Como $f \in BMO^\beta$ por ser acotada, si se toma $\sigma = \beta e^{1-1/\alpha}$ en (3.5.24) y $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_{\beta e^{1-1/\alpha}}$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1+\log\frac{\beta e^{1-1/\alpha}\rho(\xi)}{r}}{|B|}\int_B |f-f_B|\,dx &\leq \Psi^\beta\left(f, \beta e^{1-1/\alpha}\right)\\ &\leq (2\text{diam}(\Omega))^\alpha h(\beta e^{1-1/\alpha})\,[f]_{Lip_\alpha},\end{aligned}$$

por lo que $f \in LMO^{\beta e^{1-1/\alpha}} = LMO^\beta$ y

$$\lim_{\sigma\to 0^+} \Psi^\beta(f,\sigma) \leq (2\text{diam}(\Omega))^\alpha \lim_{\sigma\to 0^+} h(\sigma)\,[f]_{Lip_\alpha} = 0.$$

Por lo tanto, $f \in LMO_0^\beta$.

Observación 3.5.25. Sean Ω', abierto tal que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, y $f \in LMO_0^\beta(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Entonces, trivialmente $f \in BMO^\beta(\Omega')$ ya que

$$[f]_{BMO^\beta(\Omega')} \leq 2\,\|f\|_\infty.$$

Además, ya que $\text{dist}(\xi, (\Omega')^c) \leq \rho(\xi)$, para cada $\xi \in \Omega'$, se tienen

$$[f]_{LMO^\beta(\Omega')} \leq [f]_{LMO^\beta(\Omega)}$$

y

$$\Psi^\beta_{\Omega'}(f,\sigma) \leq \Psi^\beta_\Omega(f,\sigma),$$

por lo que $f \in LMO_0^\beta(\Omega')$.

El siguiente lema nos proporcionará una aproximación por funciones suaves para el espacio $LMO_0^\beta(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$.

Lema 3.5.26. *Sean $\Omega^j = \{x \in \Omega : \rho(x) > 2^{-j}\}$ y $\rho_j(x) = dist\left(x, (\Omega^j)^c\right)$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Si $\Omega^j \neq \varnothing$ y $f \in LMO^\beta$, se define*

$$[f]_{LMO^{\beta,j}} = \sup_{x\in\Omega^j, 0<r\leq\beta\rho_{j+1}(x)} \frac{1+\log\frac{\beta\rho_{j+1}(x)}{r}}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)-f_{B(x,r)}|dy.$$

Entonces, si $\Omega^{k_0} \neq \varnothing$ y $f \in LMO_0^\beta$, existe $\{f_k\}_{k\geq k_0+2} \subset \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega^{k_0}}\right)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} [f-f_k]_{LMO^{\beta,k_0}} = 0.$$

Demostración. Primero observemos que si $x \in \Omega^{k_0}$, tenemos $x - 2^{-k}z \in \Omega^{k_0+1}$, para todo $z \in B(0,1)$ y para cada $k \geq k_0+1$. En efecto, si $y \notin \Omega$, $z \in B(0,1)$ y $k \geq k_0+1$, resulta

$$\begin{aligned}\rho(x) &\leq |x-2^{-k}z-y| + |2^{-k}z| < |x-2^{-k}z-y| + 2^{-k_0-1}\\ &< |x-2^{-k}z-y| + \frac{\rho(x)}{2}.\end{aligned}$$

Así, tomando supremo sobre $y \notin \Omega$ en lo anterior, obtenemos

$$2^{-k_0-1} < \frac{\rho(x)}{2} \leq \rho\left(x - 2^{-k}z\right). \tag{3.5.27}$$

En particular, la desigualdad de arriba nos dice que $x - 2^{-k}z \in \Omega$, siempre que $x \in \Omega^{k_0}$, $z \in B(0,1)$ y $k \geq k_0 + 1$. Ahora, tomamos una función no-negativa $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\operatorname{sop}(\varphi) \subset B(0,1)$ y $\int \varphi\, dx = 1$. Denotamos $\varphi_k(z) = 2^{nk}\varphi(2^k z)$ y, por lo observado previamente, la convolución $f_k = f * \varphi_k$ está bien definida sobre Ω^j mediante

$$f * \varphi_k(x) = \int_\Omega f(z)\varphi_k(x-z)dz = \int_{B(0,1)} f(x - 2^{-k}z)\varphi(z)dz$$

para $x \in \Omega^j$ y $k \geq j+1$, con $j \geq k_0$. Sea $B = B(\xi, r)$ con $\xi \in \Omega^{k_0}$ y $r \leq \sigma\rho_{k_0+1}(\xi)$, para $0 < \sigma \leq \beta/2$. Entonces, si $k \geq k_0 + 2$, tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_B |f_k(x) - (f_k)_B|\, dx \\
= &\int_B \left| \int_{B(0,1)} f(x-2^{-k}z)\varphi(z)dz - |B|^{-1}\int_B \int_{B(0,1)} f(y-2^{-k}z)\varphi(z)dzdy \right| dx \\
\leq &\int_B \int_{B(0,1)} \left| f(x-2^{-k}z) - |B|^{-1}\int_B f(y-2^{-k}z)dy \right| \varphi(z)dzdx \\
= &\int_{B(0,1)} \varphi(z) \int_B \left| f(x-2^{-k}z) - |B|^{-1}\int_B f(y-2^{-k}z)dy \right| dxdz \\
= &\int_{B(0,1)} \varphi(z) \int_{B(\xi-2^{-k}z,r)} \left| f(\zeta) - f_{B(\xi-2^{-k}z,r)} \right| d\zeta dz.
\end{aligned}$$

Luego, dado que $\rho_{k_0+1} \leq \rho$, por (3.5.27) resulta

$$\begin{aligned}
&\frac{1+\log\frac{\beta\rho_{k_0+1}(\xi)}{r}}{|B|}\int_B |f_k(x) - (f_k)_B|\, dx \\
\leq &\int_{B(0,1)} \varphi(z)\frac{1+\log\frac{2\beta\rho(\xi-2^{-k}z)}{r}}{|B(\xi-2^{-k}z,r)|}\int_{B(\xi-2^{-k}z,r)} \left| f(\zeta) - f_{B(\xi-2^{-k}z,r)} \right| d\zeta dz \\
\leq &(1+\log 2)\Psi^\beta(f,\sigma),
\end{aligned}$$

de lo cual se obtiene

$$\begin{aligned}
&\frac{1+\log\frac{\beta\rho_{k_0+1}(\xi)}{r}}{|B|}\int_B |(f-f_k) - (f-f_k)_B|\, dx \\
\leq &\frac{1+\log\frac{\beta\rho(\xi)}{r}}{|B|}\int_B |f - f_B|\, dx + \frac{1+\log\frac{\beta\rho_{k_0+1}(\xi)}{r}}{|B|}\int_B |f_k - (f_k)_B|\, dx \\
\leq &(2+\log 2)\Psi^\beta(f,\sigma).
\end{aligned} \tag{3.5.28}$$

Ahora, consideramos $\sigma\rho_{k_0+1}(\xi) < r \leq \beta\rho_{k_0+1}(\xi)$ y observamos que si $y \notin \Omega^{k_0+1}$ y $x \in \Omega^{k_0}$ tenemos

$$2^{-k_0-1} = 2^{-k_0} - 2^{-k_0-1} < \rho(x) - \rho(y) \leq |x-y|,$$

de lo cual se deduce que $\rho_{k_0+1}(x) \geq 2^{-k_0-1}$ para $x \in \Omega^{k_0}$. Entonces

$$\begin{aligned}
& \frac{1+\log\frac{\beta\rho_{k_0+1}(\xi)}{r}}{|B|}\int_B |(f-f_k)-(f-f_k)_B|\,dx \\
\leq\ & \frac{2\left(1+\log\frac{\beta}{\sigma}\right)}{|B(0,1)|\left(\sigma\rho_{k_0+1}(\xi)\right)^n}\int_B |f-f_k|\,dx \\
\leq\ & \frac{2^{(k_0+1)n+1}\left(1+\log\frac{\beta}{\sigma}\right)}{|B(0,1)|\sigma^n}\int_{\Omega^{k_0+1}} |f-f_k|\,dx. \qquad (3.5.29)
\end{aligned}$$

Así, con (3.5.28) y (3.5.29) se sigue que

$$[f-f_k]_{LMO^{\beta,k_0}} \leq (2+\log 2)\Psi^\beta(f,\sigma) + \frac{2^{(k_0+1)n+1}\left(1+\log\frac{\beta}{\sigma}\right)}{|B(0,1)|\sigma^n}\|f-f_k\|_{L^1\left(\Omega^{k_0+1}\right)}$$

para $0<\sigma\leq\beta/2$ y $k\geq k_0+2$. Finalmente, por un lado, ya que $f\in LMO_0^\beta$, tenemos $f\in BMO^\beta\subset L^1\left(\Omega^j\right)$, para cada $j\geq k_0$, y por otro lado, como es bien sabido, $\lim\limits_{k\to\infty}\|f-f_k\|_{L^1\left(\Omega^{k_0+1}\right)}=0$ con $f_k\in\mathcal{C}^\infty\left(\Omega^{k_0+1}\right)\subset\mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega^{k_0}}\right)$ para $k\geq k_0+2$, con lo que concluimos la demostración. □

Observación 3.5.30. En la demostración del Lema 3.5.26 vemos que si además $f\in L^\infty(\Omega)$, las funciones f_k construidas allí verifican

$$|f_k(x)|\leq\|f\|_\infty\int_{B(0,1)}\varphi(z)dz=\|f\|_\infty$$

para c. t. p. $x\in\Omega^{k_0}$ y $k\geq k_0+1$. Así, $\|f_k\|_{L^\infty\left(\Omega^{k_0}\right)}\leq\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ para cada $k\geq k_0+1$. Más aún, si e_i es el i-ésimo vector canónico y $h\in(-1,1)$, tenemos

$$\frac{f_k(x+he_i)-f_k(x)}{h}=\frac{2^{nk}}{h}\int_\Omega f(z)\left(\varphi\left(2^k(x+he_i-z)\right)-\varphi\left(2^k(x-z)\right)\right)dz,$$

donde, si D denota el operador gradiente, por el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial resulta

$$\left|f(z)\left(\varphi\left(2^k(x+he_i-z)\right)-\varphi\left(2^k(x-z)\right)\right)\right|\leq\|f\|_\infty\|D\varphi\|_\infty 2^k|h|.$$

Así, como Ω es acotado, por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue obtenemos

$$\begin{aligned}
D_if_k(x) &= \lim_{h\to0}\frac{f_k(x+he_i)-f_k(x)}{h} \\
&= \int_\Omega f(z)2^{nk}D_i\varphi\left(2^k(x-z)\right)dz \\
&= \int_{B(0,1)} f(x-2^{-k}z)D_i\varphi(z)dz
\end{aligned}$$

y luego

$$\|D_if_k\|_\infty\leq|B(0,1)|\,\|D_i\varphi\|_\infty\,\|f\|_\infty.$$

Por lo tanto, probamos que

$$\|Df_k\|_\infty \leq C\,\|f\|_\infty\,,$$

donde C es independiente de k y f.

En vista de las observaciones y resultados obtenidos, de ahora y en adelante, suponemos que los coeficientes del operador L en (3.5.1) están en $L^\infty(\Omega)\cap LMO_0^\beta(\Omega)$.

Para la demostración del Teorema 3.5.5 será también clave el siguiente resultado.

Lema 3.5.31. *Sean L, Ω y Ω' como en el Teorema 3.5.5 y $w\in A_1^\beta(\Omega')$. Entonces, existen $C>0$ y $r_0\in(0,\beta)$ tales que, para cada $B(x_0,r)\in\mathcal{F}_{\beta/8}(\Omega)$, con $x_0\in\Omega'$ y $r<r_0$, y toda $u\in W_0^{2,p}(B(x_0,r))$, para algún $p\in(1,\infty)$, con $D^\alpha u\in BMO_w^\beta(\Omega')$ para $|\alpha|\leq 2$, se tiene*

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right]_{BMO_w^\beta(\Omega')}\leq C\left(1+\log\frac{1}{r}\right)[Lu]_{BMO_w^\beta(\Omega')}\,,$$

donde C depende de β, w, n, ν y Ω.

Antes de la demostración damos los siguientes lemas.

Lema 3.5.32. *Sean Ω' como en el Lema 3.5.31 y Γ_i como en el Lema 3.5.7. Entonces, $\int_{S^{n-1}}\Gamma_i(\cdot,y)y_j d\sigma(y)\in L^\infty(\Omega')\cap LMO^\beta(\Omega')$ con*

$$\left\|\int_{S^{n-1}}\Gamma_i(\cdot,y)y_j d\sigma(y)\right\|_{LMO^{\beta,\infty}(\Omega')}\leq C_{n,\nu}.$$

Demostración. Calculando directamente en (3.5.12), tenemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_i(x,y) &= \frac{\partial\Gamma}{\partial y_i}(x,y)\\
&= \frac{-1/2}{|S^n|(\det a(x))^{1/2}}\left(\sum_{1\leq k,l\leq n}\left(a^{-1}\right)_{k,l}(x)y_k y_l\right)^{-\frac{n}{2}}\sum_{1\leq k,l\leq n}\left(a^{-1}\right)_{k,l}(x)\frac{\partial\left(y_k y_l\right)}{\partial y_i}\\
&= \frac{-1}{|S^n|(\det a(x))^{1/2}}\left(\sum_{1\leq k,l\leq n}\left(a^{-1}\right)_{k,l}(x)y_k y_l\right)^{-\frac{n}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left(a^{-1}\right)_{k,i}(x)y_k.
\end{aligned}$$

Ahora, fijamos $y\in S^{n-1}$ y, por la Proposición 3.5.9, vemos que $\|\Gamma_i(\cdot,y)\|_{LMO^{\beta,\infty}(\Omega')}$ se estima con la constante $7/|S^n|$ multiplicada por el producto de

$$\left\|(\det a)^{-1/2}\right\|_{LMO^{\beta,\infty}(\Omega')}\,,$$

$$\left\|\left(\sum_{1\leq k,l\leq n}\left(a^{-1}\right)_{k,l}y_k y_l\right)^{-\frac{n}{2}}\right\|_{LMO^{\beta,\infty}(\Omega')}$$

y

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\left(a^{-1}\right)_{k,i}y_k\right\|_{LMO^{\beta,\infty}(\Omega')}.$$

Primero notamos que, como $\mathcal{F}_\beta(\Omega')\subset\mathcal{F}_\beta(\Omega)$, tenemos

$$\max_{1\le i,j\le n}\|a_{i,j}\|_{LMO^{\beta,\infty}(\Omega')}\le\nu^{-1}$$

por (3.5.4). Entonces, es claro que, como en la demostración del Lema 3.5.7, se obtiene

$$\left\|(\det a)^{-1/2}\right\|_{LMO^{\beta,\infty}(\Omega')}\le C_{n,\nu},$$

donde $C_{n,\nu}$ denota una constante que depende solo de n y ν. Además, por (3.5.20) resulta

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\left(a^{-1}\right)_{k,i}y_k\right\|_{LMO^{\beta,\infty}(\Omega')}\le\sum_{k=1}^{n}\left\|(a^{-1})_{k,i}\right\|_{LMO^{\beta,\infty}(\Omega')}\le nC_{n,\nu}.$$

De manera similar tenemos

$$\left\|\sum_{1\le k,l\le n}\left(a^{-1}\right)_{k,l}y_ky_l\right\|_{LMO^{\beta,\infty}(\Omega')}\le\sum_{1\le k,l\le n}\left\|\left(a^{-1}\right)_{k,l}\right\|_{LMO^{\beta,\infty}(\Omega')}\le n^2C_{n,\nu}$$

y, por la Proposición 3.5.9,

$$\begin{aligned}&\left\|\left(\sum_{1\le k,l\le n}\left(a^{-1}\right)_{k,l}y_ky_l\right)^n\right\|_{LMO^{\beta,\infty}(\Omega')}\\ \le\ &\left(\sum_{j=0}^{n-1}2^j\right)\left\|\sum_{1\le k,l\le n}\left(a^{-1}\right)_{k,l}y_ky_l\right\|^n_{LMO^{\beta,\infty}(\Omega')}\\ \le\ &\left(\sum_{j=0}^{n-1}2^j\right)n^{2n}C^n_{n,\nu}.\end{aligned}$$

Ahora, como a^{-1} satisface (3.5.3), resulta

$$\left(\sum_{1\le k,l\le n}\left(a^{-1}\right)_{k,l}y_ky_l\right)^n\ge\nu^n|y|^{2n}=\nu^n$$

en c. t. p. de $\mathbb{R}^n$. Entonces, aplicando la Proposición 3.5.11 obtenemos

$$\left\|\left(\sum_{1\le k,l\le n}\left(a^{-1}\right)_{k,l}y_ky_l\right)^{-\frac{n}{2}}\right\|_{LMO^{\beta,\infty}(\Omega')}\le C_{n,\nu}.$$

De este modo, se sigue que

$$\|\Gamma_i(\cdot,y)\|_{LMO^{\beta,\infty}(\Omega')}\le C_{n,\nu},$$

para todo $y \in S^{n-1}$. Luego, por un lado vemos que

$$\left\| \int_{S^{n-1}} \Gamma_i(\cdot, y) y_j d\sigma(y) \right\|_\infty \leq \int_{S^{n-1}} \|\Gamma_i(\cdot, y)\|_\infty |y_j| d\sigma(y) \leq C_{n,\nu}.$$

Por otro lado, si $B = B(\xi, s) \in \mathcal{F}_\beta(\Omega')$ resulta

$$\begin{aligned}
&\int_B \left| \int_{S^{n-1}} \Gamma_i(x, y) y_j d\sigma(y) - \int_{S^{n-1}} (\Gamma_i(\cdot, y))_B \, y_j d\sigma(y) \right| dx \\
\leq \; & \int_{S^{n-1}} \int_B |\Gamma_i(x, y) - (\Gamma_i(\cdot, y))_B| \, dx |y_j| d\sigma(y) \\
\leq \; & \frac{|B|}{1 + \log \frac{\beta \rho'(\xi)}{s}} \int_{S^{n-1}} [\Gamma_i(\cdot, y)]_{LMO^\beta(\Omega')} \, d\sigma(y) \leq \frac{C_{n,\nu}|B|}{1 + \log \frac{\beta \rho'(\xi)}{s}}.
\end{aligned}$$

De este modo, obtenemos el resultado buscado. □

Lema 3.5.33. *Sean Ω' como en el Lema 3.5.31, $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{\Omega'} \subset \Omega^{k_0}$, donde Ω^{k_0} es como en el Lema 3.5.26, y $B_0 = B(x_0, r)$. Entonces, si a es un coeficiente del operador elíptico dado en (3.5.1), existen funciones b_r y a_{k_r}, con $k_r \geq k_0 + 3$, tales que $a_{k_r} \in \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega^{k_0+1}}\right)$, $b_r = a_{k_r}$ sobre $\overline{2B_0}$,*

$$[a - a_{k_r}]_{LMO^{\beta'}(\Omega')} < r,$$

con $\beta' = \beta + \sqrt{n}\sigma$ para algún σ como en el Teorema 3.1.23, y

$$[b_r]_{LMO^{\beta'}(\Omega')} \leq C \left(1 + \log \frac{1}{r}\right) r,$$

con C independiente de r.

Demostración. Por el Lema 3.5.26, existe $\{a_k\}_{k \geq k_0+3}$ sucesión de funciones en $\mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega^{k_0+1}}\right)$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} [a - a_k]_{LMO^{\beta',k_0}} = 0.$$

En particular, como $d(x, (\Omega')^c) \leq \rho_{k_0+1}(x)$, para cada $x \in \Omega'$, se tiene $[a - a_k]_{LMO^{\beta'}(\Omega')} \leq [a - a_k]_{LMO^{\beta',k_0}}$ para cada $k \geq k_0 + 3$, y luego existe $k_r \geq k_0 + 3$ tal que $a_{k_r} \in \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega^{k_0+1}}\right)$ y

$$[a - a_{k_r}]_{LMO^{\beta'}(\Omega')} < r.$$

Ahora, definimos b_r sobre Ω^{k_0+1} como

$$b_r(x) = a_{k_r}(x)$$

si $x \in 2B_0$, y

$$b_r(x) = a_{k_r}\left(x_0 + 2r \frac{x - x_0}{|x - x_0|}\right)$$

si $x \notin 2B_0$. Por la Observación 3.5.30, sabemos que las funciones a_k se pueden tomar de modo que $\|Da_k\|_{L^\infty(\Omega^{k_0+1})} \leq C\|a\|_{L^\infty(\Omega)}$, con C independiente de k. Veamos que $b_r \in Lip_1\left(\Omega^{k_0+1}\right)$ con

$$[b_r]_{Lip_1(\Omega^{k_0+1})} \leq C\|a\|_\infty \tag{3.5.34}$$

y

$$\sup_{x,y\in\Omega^{k_0+1}} |b_r(x) - b_r(y)| \leq C\|a\|_\infty r, \tag{3.5.35}$$

con C independiente de r. Primero, sean x e y en $\overline{2B_0}$. Por la Observación 3.5.30 tenemos

$$\begin{aligned} |b_r(x) - b_r(y)| &= |a_{k_r}(x) - a_{k_r}(y)| \leq \|Da_{k_r}\|_\infty |x-y| \\ &\leq C\|a\|_\infty |x-y|. \end{aligned}$$

Por otra parte, si x e y no están en $2B_0$, resulta

$$\begin{aligned} |b_r(x) - b_r(y)| &= \left| a_{k_r}\left(x_0 + 2r\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\right) - a_{k_r}\left(x_0 + 2r\frac{y-x_0}{|y-x_0|}\right)\right| \\ &\leq \|Da_{k_r}\|_\infty 2r \left|\frac{x-x_0}{|x-x_0|} - \frac{y-x_0}{|y-x_0|} + \frac{y-x_0}{|x-x_0|} - \frac{y-x_0}{|x-x_0|}\right| \\ &\leq C\|a\|_\infty 2r\left(\frac{|x-y|}{|x-x_0|} + |y-x_0|\left|\frac{1}{|x-x_0|} - \frac{1}{|y-x_0|}\right|\right) \\ &= C\|a\|_\infty 2r\left(\frac{|x-y|}{|x-x_0|} + \frac{||y-x_0| - |x-x_0||}{|x-x_0|}\right) \\ &< C\|a\|_\infty |x-y|. \end{aligned}$$

Ahora, supongamos $x \in \overline{2B_0}$ e $y \notin \overline{2B_0}$. Sea z el punto de intersección entre la frontera de $2B_0$ y el segmento de recta que une a x e y. Entonces, como $|x-y| = |x-z| + |z-y|$, tenemos

$$\begin{aligned} |b_r(x) - b_r(y)| &\leq |b_r(x) - b_r(z)| + |b_r(z) - b_r(y)| \\ &\leq C\|a\|_\infty (|x-z| + |z-y|) = C\|a\|_\infty |x-y|. \end{aligned}$$

Así, obtenemos (3.5.34). Para probar (3.5.35), denotemos $x^r = x$, si $x \in \overline{2B_0}$, y $x^r = x_0 + 2r\frac{x-x_0}{|x-x_0|}$ cuando $x \notin 2B_0$. Entonces, para cada $x \in \Omega^{k_0+1}$, $x^r \in \overline{2B_0}$ y, nuevamente por la Observación 3.5.30, resulta

$$\begin{aligned} |b_r(x) - b_r(y)| &= |a_{k_r}(x^r) - a_{k_r}(y^r)| \leq \|Da_{k_r}\|_\infty |x^r - y^r| \\ &\leq 4r\|Da_{k_r}\|_\infty \leq Cr\|a\|_\infty. \end{aligned}$$

Estimemos ahora $[b_r]_{LMO^{\beta'}(\Omega')}$. Sea $B(\xi, s) \in \mathcal{F}_{\beta'}(\Omega')$. Por la Observación 3.5.23 con $\alpha = 1$ y $\sigma = r$, cuando $s \leq r\rho'(\xi)$, por (3.5.34), obtenemos

$$\frac{1 + \log\frac{\beta'\rho'(\xi)}{s}}{|B(\xi,s)|}\int_{B(\xi,s)} |b_r(x) - (b_r)_{B(\xi,s)}|\, dx \quad \leq \quad 2\mathrm{diam}(\Omega')h(r)\,[b_r]_{Lip_1}$$

$$\leq \quad C\mathrm{diam}(\Omega)\left(1+\log\frac{1}{r}\right) r\,\|a\|_{\infty}.$$

Cuando $s > r\rho'(\xi)$, por (3.5.35), se tiene

$$\begin{aligned}
& \frac{1+\log\frac{\beta'\rho'(\xi)}{s}}{|B(\xi,s)|}\int_{B(\xi,s)} |b_r(x)-(b_r)_{B(\xi,s)}|\,dx \\
\leq\ & \frac{1+\log\frac{\beta'\rho'(\xi)}{s}}{|B(\xi,s)|^2}\int_{B(\xi,s)}\int_{B(\xi,s)} |b_r(x)-b_r(y)|\,dydx \\
\leq\ & C\left(1+\log\frac{\rho'(\xi)}{s}\right) r\,\|a\|_{\infty} \\
\leq\ & C\left(1+\log\frac{1}{r}\right) r\,\|a\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

De este modo, resulta

$$[b_r]_{LMO^{\beta'}(\Omega')} \leq C_{a,\Omega}\left(1+\log\frac{1}{r}\right) r.$$

□

Demostración del Lema 3.5.31. Como u tiene soporte compacto contenido en B_0, se la puede considerar definida en todo $\mathbb{R}^n$. Denotemos $D_{i,j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$. Se observa que, desde el Lema 1.0.26 (Lema 2 en [Lor72]), para obtener la fórmula de representación en el Teorema 1.0.25, solo necesitamos (3.5.2) y (3.5.3) para los coeficientes $a_{i,j}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
D_{i,j}u(x) \quad =\quad & \text{v.p.}\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma_{i,j}(x,x-y)\left(\sum_{k,l=1}^{n}(a_{k,l}(x)-a_{k,l}(y))\,D_{k,l}u(y)\right)dy \\
& +\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma_{i,j}(x,x-y)Lu(y)dy + Lu(x)\int_{S^{n-1}}\Gamma_i(x,y)y_j\,d\sigma(y)
\end{aligned}$$

para c. t. p. $x \in B_0$. Ahora, ya que las funciones $\Gamma_{i,j}$ son núcleos de C-Z en la segunda variable, denotamos la integral singular con núcleo variable, y a sus conmutadores, como

$$S^{i,j}f(x) = \text{v.p.}\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma_{i,j}(x,x-y)f(y)dy$$

y

$$S^{i,j}_{a_{k,l}}f(x) = \text{v.p.}\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma_{i,j}(x,x-y)(a_{k,l}(x)-a_{k,l}(y))f(y)dy,$$

respectivamente. Luego, la fórmula de representación queda como

$$D_{i,j}u(x) = \sum_{k,l=1}^{n} S^{i,j}_{a_{k,l}}\left(D_{k,l}u\right)(x) + S^{i,j}\left(Lu\right)(x) + Lu(x)\int_{S^{n-1}}\Gamma_i(x,y)y_j\,d\sigma(y).$$

Consideremos ahora la función η en (3.1.12), la cual es $\mathcal{C}^{\infty}([0,\infty))$ y tal que $0 \leq \eta \leq 1$, con $\eta(t) = 0$ si $t \geq 1$, y $\eta(t) = 1$ si $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$. Denotemos $B_0 = B(x_0, r)$ y $\eta_{x_0,r}(x) = \eta\left(\frac{|x-x_0|}{2r}\right)$

para $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, dado que $\text{sop}(D_{i,j}u) \subset \overline{B_0}$ y $\eta_{x_0,r} = 1$ sobre $\overline{B_0}$, para $x \in B_0$ resulta

$$\begin{aligned} D_{i,j}u(x) &= \eta_{x_0,r}(x)D_{i,j}u(x) \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} \eta_{x_0,r}(x)S^{i,j}_{a_{k,l}}\left(D_{k,l}u\right)(x) + \eta_{x_0,r}(x)S^{i,j}\left(Lu\right)(x) \\ &\quad + \eta_{x_0,r}(x)Lu(x)\int_{S^{n-1}} \Gamma_i(x,y)y_j d\sigma(y). \end{aligned} \tag{3.5.36}$$

Notemos que, por ser $B_0 \in \mathcal{F}_{\beta/8}$, si $x \in 2B_0$ e $y \in B_0$ tenemos

$$|x-y| < \frac{3\beta}{8}\rho(x_0) \leq \frac{3\beta}{8(1-\beta/4)}\rho(x) < \frac{\beta}{2}\rho(x),$$

por lo que $\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right) = 1$. Entonces, si $x \in 2B_0$ resulta

$$\begin{aligned} S^{i,j}_{a_{k,l}}\left(D_{k,l}u\right)(x) &= \text{v.p.}\int_{B_0} \Gamma_{i,j}(x,x-y)(a_{k,l}(x)-a_{k,l}(y))D_{k,l}u(y)dy \\ &= \text{v.p.}\int_{B_0} \Gamma_{i,j}(x,x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\beta\rho(x)}\right)(a_{k,l}(x)-a_{k,l}(y))D_{k,l}u(y)dy \\ &= \left(S^{i,j}_{a_{k,l}}\right)^{\beta,\eta}\left(D_{k,l}u\right)(x) \end{aligned}$$

y, como $\text{sop}(\eta_{x_0,r}) \subset 2B_0$,

$$\eta_{x_0,r}(x)S^{i,j}_{a_{k,l}}\left(D_{k,l}u\right)(x) = \eta_{x_0,r}(x)\left(S^{i,j}_{a_{k,l}}\right)^{\beta,\eta}\left(D_{k,l}u\right)(x)$$

para $x \notin 2B_0$. Así, la igualdad anterior vale en c. t. p. de Ω. De igual manera

$$\eta_{x_0,r}S^{i,j}\left(Lu\right) = \eta_{x_0,r}\left(S^{i,j}\right)^{\beta,\eta}\left(Lu\right)$$

en c. t. p. de Ω. De este modo, vemos que las integrales singulares en (3.5.36), y sus conmutadores, son operadores β-locales. Ahora, suponemos $0 < r \leq \beta$ y estimamos primero $[\eta_{x_0,r}]_{LMO^\beta(\Omega')}$. Sea $B(\xi,s) \in \mathcal{F}_\beta(\Omega')$ y denotemos $\rho'(\xi) = \text{dist}(\xi,(\Omega')^c)$. Cuando $s < r\rho'(\xi)$, ya que $\eta_{x_0,r}$ es Lipschitz 1 con $[\eta_{x_0,r}]_{Lip_1} \leq \frac{\|\eta'\|_\infty}{2r}$, desde la Observación 3.5.23 con $\alpha = 1$ y $\sigma = r$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1+\log\frac{\beta\rho'(\xi)}{s}}{|B(\xi,s)|}\int_{B(\xi,s)} \left|\eta_{x_0,r} - \left(\eta_{x_0,r}\right)_{B(\xi,s)}\right| dx &\leq 2\text{diam}(\Omega')h(r)\left[\eta_{x_0,r}\right]_{Lip_1} \\ &\leq \text{diam}(\Omega)\left(1+\log\frac{1}{r}\right)\|\eta'\|_\infty. \end{aligned}$$

Cuando $s \geq r\rho'(\xi)$, por ser $0 \leq \eta_{x_0,r} \leq 1$ resulta

$$\frac{1+\log\frac{\beta\rho'(\xi)}{s}}{|B(\xi,s)|}\int_{B(\xi,s)} \left|\eta_{x_0,r} - \left(\eta_{x_0,r}\right)_{B(\xi,s)}\right| dx \leq 2\left(1+\log\frac{\beta\rho'(\xi)}{s}\right)$$

$$\leq \quad 2\left(1+\log\frac{1}{r}\right).$$

Por lo tanto, se sigue

$$[\eta_{x_0,r}]_{LMO^\beta(\Omega')} \leq C_{\eta,\Omega}\left(1+\log\frac{1}{r}\right) \tag{3.5.37}$$

con $C_{\eta,\Omega} = \max\{2, \operatorname{diam}(\Omega)\,\|\eta'\|_\infty\}$. Entonces, ya que $[\cdot]_{BMO_w^\beta}$ es sub-aditiva, por el Lema 3.4.20 tenemos

$$\begin{aligned}
&[D_{i,j}u]_{BMO_w^\beta(\Omega')}\\
\leq\ & \sum_{k,l=1}^{n}\left[\eta_{x_0,r}S_{a_{k,l}}^{i,j,\beta,\eta}\left(D_{k,l}u\right)\right]_{BMO_w^\beta(\Omega')} + C\left(1+\log\frac{1}{r}\right)\left[S^{i,j,\beta,\eta}\left(Lu\right)\right]_{BMO_w^\beta(\Omega')}\\
&+C\left(1+\log\frac{1}{r}\right)\left[Lu\int_{S^{n-1}}\Gamma_i(\cdot,y)y_j d\sigma(y)\right]_{BMO_w^\beta(\Omega')}.
\end{aligned} \tag{3.5.38}$$

Por el Lema 3.5.32 vemos que $\int_{S^{n-1}}\Gamma_i(\cdot,y)y_j d\sigma(y) \in L^\infty(\Omega')\cap LMO^\beta(\Omega')$ con

$$\left\|\int_{S^{n-1}}\Gamma_i(\cdot,y)y_j d\sigma(y)\right\|_{LMO^{\beta,\infty}(\Omega')} \leq C_{n,\nu}. \tag{3.5.39}$$

Por otra parte, por el Teorema 3.1.23, $S^{i,j,\beta,\eta}$ es acotado sobre $BMO_w^\beta(\Omega')$, por lo que, si denotamos $\left\|S^{i,j,\beta,\eta}\right\| = \sup\limits_{[f]_{BMO_w^\beta(\Omega')}=1}\left[S^{i,j,\beta,\eta}f\right]_{BMO_w^\beta(\Omega')}$, por el Lema 3.4.20 y (3.5.39) tenemos

$$\begin{aligned}
&\left[S^{i,j,\beta,\eta}\left(Lu\right)\right]_{BMO_w^\beta(\Omega')} + \left[Lu\int_{S^{n-1}}\Gamma_i(\cdot,y)y_j d\sigma(y)\right]_{BMO_w^\beta(\Omega')}\\
\leq\ & \left(\left\|S^{i,j,\beta,\eta}\right\| + C_{n,\nu,\beta}\right)[Lu]_{BMO_w^\beta(\Omega')}.
\end{aligned} \tag{3.5.40}$$

Para el otro término que nos queda estimar en (3.5.38) aplicamos el Lema 3.5.26. Por conveniencia en la notación, escribimos

$$S^{i,j} = S, \quad a_{k,l} = a, \quad f = D_{k,l}u,$$

y estimamos

$$\left[\eta_{x_0,r}S_a^{\beta,\eta}f\right]_{BMO_w^\beta(\Omega')}.$$

Tomemos k_0 tal que $\overline{\Omega'} \subset \Omega^{k_0}$ y sean b_r y a_{k_r} las funciones dadas por el Lema 3.5.33. Notemos que por ser $b_r = a_{k_r}$ sobre $2B_0$ y $\operatorname{sop}(f) \subset B_0$, se tiene

$$\begin{aligned}
S_{a_{k_r}-b_r}^{\beta,\eta}f(x) &= \left(a_{k_r}(x)-b_r(x)\right)S^{\beta,\eta}f(x) - S^{\beta,\eta}\left(\left(a_{k_r}-b_r\right)f\chi_{B_0}\right)(x)\\
&= \left(a_{k_r}(x)-b_r(x)\right)S^{\beta,\eta}f(x)
\end{aligned}$$

y luego

$$\eta_{x_0,r}(x)S_{a_{k_r}-b_r}^{\beta,\eta}f(x) = \eta_{x_0,r}(x)\left(a_{k_r}(x)-b_r(x)\right)S^{\beta,\eta}f(x) = 0$$

para c. t. p. $x \in \Omega^{k_0+1}$. Entonces, por el Lema 3.4.20, el Teorema 3.1.23 y (3.5.37) resulta

$$\begin{aligned}
&\left[\eta_{x_0,r} S_a^{\beta,\eta} f\right]_{BMO_w^\beta(\Omega')} \\
\leq\ & \left[\eta_{x_0,r} S_{a-a_{k_r}}^{\beta,\eta} f\right]_{BMO_w^\beta(\Omega')} + \left[\eta_{x_0,r} S_{b_r}^{\beta,\eta} f\right]_{BMO_w^\beta(\Omega')} \\
\leq\ & C \left\|\eta_{x_0,r}\right\|_{LMO^{\beta,\infty}(\Omega')} \left(\left[S_{a-a_{k_r}}^{\beta,\eta} f\right]_{BMO_w^\beta(\Omega')} + \left[S_{b_r}^{\beta,\eta} f\right]_{BMO_w^\beta(\Omega')} \right) \\
\leq\ & C C_{S^{\beta,\eta}} \left(1 + \log \frac{1}{r}\right) \left([a - a_{k_r}]_{LMO^{\beta'}(\Omega')} + [b_r]_{LMO^{\beta'}(\Omega')} \right) [f]_{BMO_w^\beta(\Omega')} .
\end{aligned}$$

De este modo, obtenemos

$$\left[\eta_{x_0,r} S_a^{\beta,\eta} f\right]_{BMO_w^\beta(\Omega')} \leq C_{\beta,a,\eta,\Omega} C_{S^{\beta,\eta}} \left(1 + \log \frac{1}{r}\right)^2 r \, [f]_{BMO_w^\beta(\Omega')} . \tag{3.5.41}$$

Luego, llevando (3.5.41) y (3.5.40) a (3.5.38) se sigue

$$\begin{aligned}
[D_{i,j} u]_{BMO_w^\beta(\Omega')} \ \leq\ & \left(1 + \log \frac{1}{r}\right)^2 r C_{S^{i,j,\beta,\eta}} \sum_{1 \leq k,l \leq n} C_{\beta,a_{k,l},\eta,\Omega} \, [D_{k,l} u]_{BMO_w^\beta(\Omega')} \\
& + C \left(1 + \log \frac{1}{r}\right) \left(\left\|S^{i,j,\beta,\eta}\right\| + C_{n,\nu,\beta} \right) [Lu]_{BMO_w^\beta(\Omega')} .
\end{aligned}$$

Entonces, denotando

$$C_0 = \max_{1 \leq k,l \leq n} C_{\beta,a_{k,l},\eta,\Omega},$$

$$C_1 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} C_{S^{i,j,\beta,\eta}}$$

y

$$C_2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \left(\left\|S^{i,j,\beta,\eta}\right\| + C_{n,\nu,\beta} \right),$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i,j \leq n} [D_{i,j} u]_{BMO_w^\beta(\Omega')} \ \leq\ & C_0 C_1 \left(1 + \log \frac{1}{r}\right)^2 r \sum_{1 \leq k,l \leq n} [D_{k,l} u]_{BMO_w^\beta(\Omega')} \\
& + C C_2 \left(1 + \log \frac{1}{r}\right) [Lu]_{BMO_w^\beta(\Omega')} .
\end{aligned}$$

Por último, como $\lim_{t \to 0^+} \left(1 + \log \frac{1}{t}\right)^2 t = 0$, existe $r_0 \in (0, \beta)$ tal que si $0 < r < r_0$ entonces $\left(1 + \log \frac{1}{r}\right)^2 r < (2 C_0 C_1)^{-1}$, y así resulta

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} [D_{i,j} u]_{BMO_w^\beta(\Omega')} \leq 2 C C_2 \left(1 + \log \frac{1}{r}\right) [Lu]_{BMO_w^\beta(\Omega')} .$$

□

Observación 3.5.42. No se pide que la bola soporte de la función u esté compactamente contenida en Ω', más aún, para la aplicación tendremos que ésta intersecta al complemento de Ω'.

Se prueba ahora el Teorema 3.5.5.

Demostración del Teorema 3.5.5. Cubrimos $\overline{\Omega'}$ con bolas de $\mathcal{F}_{\beta/8}(\Omega)$ con centro en Ω' y radio menor que el r_0 dado en el Lema 3.5.31, y nos quedamos con un subcubrimiento finito de cardinal $N = N(\Omega')$. Sea $\{\psi_k\}_{k=1,\ldots,N}$ una partición de la unidad suave subordinada a éste subcubrimiento (ver, por ejemplo, [Ada75], página 51). Cada ψ_k tiene soporte en una bola $B_k = B(x_k, r_k)$ con $x_k \in \Omega'$, $r_k = \text{mín}\left\{\frac{r_0}{2}, \frac{\beta}{16}\rho(x_k)\right\}$ y $\Omega' \subset \bigcup_{1\le k\le N} B_k$. Definimos $u_k = \psi_k u$ y aplicamos el Lema 3.5.31 a cada una de estas funciones. Ya que $u = \sum_{1\le k\le N} u_k$, resulta

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i,j\le n} [D_{i,j}u]_{BMO_w^\beta(\Omega')} &\le \sum_{k=1}^{N}\sum_{1\le i,j\le n}[D_{i,j}u_k]_{BMO_w^\beta(\Omega')}\\ &\le C\sum_{k=1}^{N}\left(1+\log\frac{1}{r_k}\right)[Lu_k]_{BMO_w^\beta(\Omega')}.\end{aligned}$$

Por un cálculo directo, junto con (3.5.2), vemos que

$$Lu_k = \psi_k Lu + 2\sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j}D_i\psi_k D_j u + uL\psi_k$$

y, por el Lema 3.4.20 junto con (3.5.4), tenemos

$$\begin{aligned}[Lu_k]_{BMO_w^\beta(\Omega')} &\le C\,\|\psi_k\|_{LMO^{\beta,\infty}(\Omega')}[Lu]_{BMO_w^\beta(\Omega')}\\ &\quad +C\nu^{-1}\sum_{1\le i,j\le n}\|D_i\psi_k\|_{LMO^{\beta,\infty}(\Omega')}[D_ju]_{BMO_w^\beta(\Omega')}\\ &\quad +C\,\|L\psi_k\|_{LMO^{\beta,\infty}(\Omega')}[u]_{BMO_w^\beta(\Omega')}.\end{aligned}$$

Entonces, por conveniencia en la notación, entendiendo que las normas $LMO^{\beta,\infty}$ y BMO_w^β se toman sobre Ω', obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i,j\le n}[D_{i,j}u]_{BMO_w^\beta} &\le C\sum_{k=1}^{N}\left(1+\log\frac{1}{r_k}\right)\|\psi_k\|_{LMO^{\beta,\infty}}[Lu]_{BMO_w^\beta}\\ &\quad +C\sum_{k=1}^{N}\left(1+\log\frac{1}{r_k}\right)\sum_{1\le i,j\le n}\|D_i\psi_k\|_{LMO^{\beta,\infty}}[D_ju]_{BMO_w^\beta}\\ &\quad +C\sum_{k=1}^{N}\left(1+\log\frac{1}{r_k}\right)\|L\psi_k\|_{LMO^{\beta,\infty}}[u]_{BMO_w^\beta}\\ &\le C'\left([u]_{BMO_w^\beta}+\sum_{j=1}^{n}[D_ju]_{BMO_w^\beta}+[Lu]_{BMO_w^\beta}\right)\end{aligned}$$

con

$$C' = C\sum_{k=1}^{N}\left(1+\log\frac{1}{r_k}\right)\left(\|L\psi_k\|_{LMO^{\beta,\infty}}+\sum_{i=1}^{n}\|D_i\psi_k\|_{LMO^{\beta,\infty}}+\|\psi_k\|_{LMO^{\beta,\infty}}\right).$$

□

3.6. Estimación para derivadas de primer orden y su aplicación

En lo subsecuente se denotarán

$$[f]_{BMO_v^\beta} = [f]_{\beta,v}$$

y

$$[f]_{BMO_{v,s}^\beta} = [f]_{\beta,v,s}$$

para $0<\beta<1$, $v\in L^1_{loc}(\Omega)$ no-negativo c.t.p. de Ω y $s>1$. También, cuando sea necesario indicar el abierto Ω considerado, denotaremos

$$[f]_{\beta,v} = [f]_{\beta,v,\Omega}$$

y

$$[f]_{\beta,v,s} = [f]_{\beta,v,s,\Omega}.$$

Asimismo, en esta sección estimaremos las derivadas de primer orden D_iu que aparecen en el Teorema 3.5.5 a fin de obtener la siguiente estimación.

Teorema 3.6.1. *Sean Ω abierto acotado no vacío de $\mathbb{R}^n$ y L un operador elíptico con coeficientes $a_{i,j}\in L^\infty(\Omega)\cap LMO_0^\beta(\Omega)$, como en (3.5.1). Dado Ω_0 abierto no vacío tal que $\overline{\Omega_0}\subset\Omega$, denótese $\rho_0(x)=d\left(x,\Omega_0^c\right)$. Entonces, si $w\in A_1^\beta(\Omega_0)$, existe una constante $C>0$ tal que, para toda $u\in W^{2,p}_{loc}(\Omega)\cap BMO_w^\beta(\Omega_0)$, para algún $p\in(1,\infty)$, con $D_{i,j}u\in BMO^\beta_{w/\rho_0^2}(\Omega_0)$, para cada $i,j=1,\ \ldots,\ n$, se tiene*

$$\left[D^2u\right]_{\beta,w/\rho_0^2,\Omega_0}\le C\left([u]_{\beta,w,\Omega_0}+[Lu]_{\beta,w/\rho_0^2,\Omega_0}\right),$$

donde C depende de β, w, n, ν, Ω_0, Ω y los coeficientes $a_{i,j}$.

Con este propósito demostraremos a continuación los lemas necesarios. El siguiente lema establece una desigualdad pesada de tipo Poincaré.

Lema 3.6.2. *Sean $f\in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ y $v\in A_p^\beta$ con $1<p<\infty$. Entonces, existe una constante $C>0$, que depende solo de β, n, p, y v, tal que, para toda $B=B\left(\xi,r\right)\in\mathcal{F}_{\beta/4}$, se tiene*

$$\|f-f_B\|_{L^p_v(B)}\le Cr\,\||Df|\|_{L^p_v(4B)},$$

donde $\|\cdot\|_{L^p_v(B)}=\left(\int_B|\cdot|^pv\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$ y $|Df|=\left(\sum_{1\le i\le n}|D_if|^2\right)^{1/2}$.

Demostración. Por aproximación de funciones $\mathcal{C}^\infty$ en espacios de Sobolev, se puede suponer $f \in \mathcal{C}^1(\Omega')$, para algún abierto no vacío Ω' tal que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ y $\overline{B} \subset \Omega'$. Entonces, por una fórmula dada en [Eva10] (página 267), se tiene

$$\int_{B(x,2r)} |f(x) - f(y)|dy \leq \frac{2^n r^n}{n} \int_{B(x,2r)} \frac{|Df(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy,$$

para cada $x \in B$. Ahora, para cada $x \in B$, dado que $2B \in \mathcal{F}_{\beta/2}$, se tiene $B(x,2r) \in \mathcal{F}_\beta$, por el Lema 2.2.5, y además $B \subset B(x,2r) \subset 4B$, por lo cual se deduce

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_B| &\leq \frac{1}{|B|} \int_{B(x,2r)} |f(x) - f(y)|dy \\
&\leq C_n \int_{B(x,2r)} \frac{|Df(y)|\chi_{4B}(y)}{|x-y|^{n-1}} dy \\
&= C_n \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B\left(x,r/2^{k-1}\right) - B\left(x,r/2^k\right)} \frac{|Df(y)|\chi_{4B}(y)}{|x-y|^{n-1}} dy \\
&\leq C_n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{2^k}\right)^{1-n} \int_{B\left(x,r/2^{k-1}\right)} |Df(y)|\chi_{4B}(y)dy \\
&\leq 2^n C_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r}{2^k} \mathcal{M}_\beta\left(|Df|\chi_{4B}\right)(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, resulta

$$\begin{aligned}
\left(\int_B |f(x) - f_B|^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq Cr \left(\int_\Omega \mathcal{M}_\beta\left(|Df|\chi_{4B}\right)(x)^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq Cr \left(\int_{4B} |Df(x)|^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es debido a que $\mathcal{M}_\beta$ es fuerte (p,p) por ser $v \in A_p^\beta$ (ver [HSV14]). □

Observación 3.6.3. Con las desigualdades de Hölder y Minkowski, se ve que, para toda B bola de $\mathbb{R}^n$, $\|f - f_{B,v}\|_{L^p_v(B)} \leq 2\|f - f_B\|_{L^p_v(B)}$, donde $f_{B,v} = \frac{1}{v(B)}\int_B f(x)v(x)dx$. Entonces se puede deducir la siguiente forma de la desigualdad de Poincaré dada arriba: Sean $f \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ y $v \in A_p^\beta$, con $1 < p < \infty$. Entonces, existe una constante $C > 0$, que depende solo de β, n, p, y v, tal que, para toda $B \in \mathcal{F}_{\beta/4}$, se tiene

$$\|f - f_{B,v}\|_{L^p_v(B)} \leq C\,\||Df|\,\rho\|_{L^p_v(4B)}.$$

Ahora, el siguiente lema será útil.

Lema 3.6.4. *Sean $w \in A_1^\beta$ y $u \in BMO_w^\beta$ tal que, para cada $i, j = 1, \ldots, n$, $D_{i,j}u \in BMO^\beta_{w/\rho^2}$. Entonces, para cada $i = 1, \ldots, n$, $D_i u \in BMO^\beta_{w/\rho}$. Más aún, dado $\varepsilon \in$*

$(0, \sqrt{\beta/8})$, *existe una constante* $C_\varepsilon \geq 1$, *independiente de* u, *verificando*

$$[D_k u]_{\beta,w/\rho} \leq C_\varepsilon [u]_{\beta,w} + \varepsilon \left[\sum_{1\leq i,j\leq n} |D_{i,j}u| \right]_{\beta,w/\rho^2},$$

para cada $k = 1, \dots, n$.

Demostración. Consideremos $0 < \sigma < \beta/8$, $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_\sigma$ y la estimación siguiente dada en [HSV14], página 625:

$$|D_k u(x)| \leq C \left((\lambda\rho(x))^{-1} \mathcal{M}_{1/2}u(x) + \lambda\rho(x)\mathcal{M}_{1/2}D^2u(x) \right),$$

para todos $x \in \Omega$, $k = 1, \dots, n$, y $\lambda > 0$, donde $\mathcal{M}_{1/2}$ es la maximal sobre la familia $\mathcal{F}_{1/2}$ y $D^2u = \sum_{1\leq i,j\leq n} |D_{i,j}u|$. Supongamos $\beta \leq 1/2$ y denotemos $B = B(\xi, r)$. No es difícil ver que, si $x \in B$, se tiene

$$\mathcal{M}_\gamma f(x) = \mathcal{M}_\gamma \left(f\chi_{\mathcal{N}_\gamma(B)} \right)(x),$$

para cualquier $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $\gamma \in (0,1)$. También, por el Lema 2.2.7, es fácil ver que si un peso, digamos v, verifica una condición local A^β_p o RH^β_s, entonces $v\rho^a$ satisface exactamente la misma condición, para cualquier $a \in \mathbb{R}$. Así, considerando algún $s > 1$ y suficiente cercano a 1 tal que $w \in RH^\beta_s$, por los Lemas 2.2.7 y 3.3.10, resulta

$$\begin{aligned}
\int_B |D_k u(x)|\, dx &\leq C\lambda^{-1}((1-\beta)\rho(\xi))^{-1} \int_B \mathcal{M}_{1/2}u(x)dx \\
&\quad + C\lambda(1+\beta)\rho(\xi) \int_B \mathcal{M}_{1/2}D^2u(x)dx \\
&\leq \frac{C}{\lambda\rho(\xi)} \left(\int_\Omega \mathcal{M}_{1/2}\left(u\chi_{\mathcal{N}_{1/2}(B)} \right)(x)^s dx \right)^{1/s} |B|^{1/s'} \\
&\quad + C\lambda\rho(\xi) \left(\int_\Omega \mathcal{M}_{1/2}\left(\left(D^2u\right)\chi_{\mathcal{N}_{1/2}(B)} \right)(x)^s dx \right)^{1/s} |B|^{1/s'} \\
&\leq \frac{C}{\lambda\rho(\xi)} \left(\int_{\mathcal{N}_{1/2}(B)} u(x)^s dx \right)^{1/s} |B|^{1/s'} \\
&\quad + C\lambda\rho(\xi) \left(\int_{\mathcal{N}_{1/2}(B)} \left(D^2u\right)(x)^s dx \right)^{1/s} |B|^{1/s'} \\
&\leq \frac{C|B|^{1/s'}}{\lambda\rho(\xi)} [u]_{1/2,w} \frac{w(B)}{|B|^{1-1/s}} + C\lambda\rho(\xi)|B|^{1/s'} \left[D^2u\right]_{1/2,w/\rho^2} \frac{(w/\rho^2)(B)}{|B|^{1-1/s}},
\end{aligned}$$

donde además aplicamos que $\mathcal{M}_{1/2}$ es acotado sobre $L^s(\Omega)$. Por lo tanto, teniendo en cuenta el Lema 3.2.23 y aplicando nuevamente el Lema 2.2.7 en la última desigualdad, obtenemos

$$(w/\rho)(B)^{-1} \int_B |D_k u(x)|\, dx \leq \frac{C}{\lambda} [u]_{\beta,w} + C\lambda \left[D^2u\right]_{\beta,w/\rho^2}, \tag{3.6.5}$$

para cada $B \in \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_\sigma$, donde C no depende de λ pero si de σ.

Sea ahora $r \leq \sigma\rho(\xi)$. Entonces $B = B(\xi, r) \in \mathcal{F}_{\beta/8}$. Por ser $w \in A_1^\beta$, para cualquier $p > 1$, tenemos $w/\rho^2 \in A_{p'}^\beta$ y, como ocurre con las clases usuales de pesos de Muckenhoupt, $v = (w/\rho^2)^{1-p} \in A_p^\beta$. Luego, por el Lema 3.6.2, si $f \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$, se tiene

$$\|f - f_B\|_{L_v^p(B)} \leq Cr\,\||Df|\|_{L_v^p(4B)}.$$

De este modo, si $\sum_{i=1}^n |D_i f| \in BMO_{w/\rho^2}^\beta$, por el Teorema 3.2.8 resulta

$$\begin{aligned}
\||Df|\|_{L_v^p(4B)} &\leq \left(\int_{B_\beta(\xi)} \left(\sum_{i=1}^n |D_i f|\right)^p (w/\rho^2)^{1-p}\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C\left(\frac{(w/\rho^2)(B_\beta(\xi))}{|B_\beta(\xi)|}\right)^{\frac{1}{p}} |B_\beta(\xi)|^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^n |D_i f|\right]_{\beta, w/\rho^2} \\
&\leq C\left(\frac{(w/\rho^2)(B)}{|B|}\right)^{\frac{1}{p}} (\beta\rho(\xi))^{\frac{n}{p}} \left[\sum_{i=1}^n |D_i f|\right]_{\beta, w/\rho^2} \\
&\leq C\left(\frac{(w/\rho)(B)}{|B|}\right)^{\frac{1}{p}} \rho(\xi)^{\frac{n}{p}-\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^n |D_i f|\right]_{\beta, w/\rho^2},
\end{aligned} \tag{3.6.6}$$

donde además, en la tercera desigualdad, usamos que $w \in A_1^\beta$ y, en la cuarta, el Lema 2.2.7. Luego, de (3.6.6) y aplicando nuevamente el Lema 2.2.7, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_B |f - f_B| dx &\leq \left(\int_B |f(x) - f_B|^p \, (w/\rho^2)^{1-p}\, dx\right)^{1/p} \left(w/\rho^2\right)(B)^{1/p'} \\
&\leq Cr\,\||Df|\|_{L_v^p(4B)}\, \rho(\xi)^{-1/p'} (w/\rho)(B)^{1/p'} \\
&\leq Cr\,(w/\rho)(B)^{1/p'} \left(\frac{(w/\rho)(B)}{|B|}\right)^{\frac{1}{p}} \rho(\xi)^{\frac{n}{p}-1} \left[\sum_{i=1}^n |D_i f|\right]_{\beta, w/\rho^2} \\
&= C\left(\frac{r}{\rho(\xi)}\right)^{1-n/p} (w/\rho)(B) \left[\sum_{i=1}^n |D_i f|\right]_{\beta, w/\rho^2} \\
&\leq C\sigma^{1-n/p}(w/\rho)(B) \left[\sum_{i=1}^n |D_i f|\right]_{\beta, w/\rho^2}.
\end{aligned} \tag{3.6.7}$$

Así, tomando $f = D_k u$ en (3.6.7) se deduce la estimación

$$(w/\rho)(B)^{-1} \int_B |D_k u(x) - (D_k u)_B| dx \leq C\sigma^{1-\frac{n}{p}} \left[\sum_{1 \leq i,j \leq n} |D_{i,j} u|\right]_{\beta, w/\rho^2}, \tag{3.6.8}$$

para $B \in \mathcal{F}_\sigma$. Luego, una vez fijado un valor de σ, de (3.6.5) y (3.6.8) se tendrá

$$[D_k u]_{\beta, w/\rho} \leq \frac{C_\sigma}{\lambda}[u]_{\beta, w} + \left(C_\sigma \lambda + C\sigma^{1-\frac{n}{p}}\right)\left[D^2 u\right]_{\beta, w/\rho^2}.$$

Por lo tanto, si consideramos en (3.6.7) $p = 2n$, dado $0 < \varepsilon < \sqrt{\beta/8}$, escogemos primero $\sigma = \left(\frac{\varepsilon}{2C}\right)^2$ y luego $\lambda = \frac{\varepsilon}{2C_\sigma}$, obteniendo así

$$[D_k u]_{\beta,w/\rho} \leq \frac{2C_\sigma^2}{\varepsilon}[u]_{\beta,w} + \varepsilon\left[D^2u\right]_{\beta,w/\rho^2},$$

cuando $\beta \leq \frac{1}{2}$. Por la equivalencia de las normas BMO locales (Lema 3.2.23) se puede conseguir la estimación correspondiente para $\frac{1}{2} < \beta < 1$. □

Demostración del Teorema 3.6.1. Como $w/\rho_0^2 \in A_1^\beta(\Omega_0)$, por el Teorema 3.5.5 se tiene

$$\left[D^2u\right]_{\beta,w/\rho_0^2,\Omega_0} \leq C\left([u]_{\beta,w/\rho_0^2,\Omega_0} + \sum_{i=1}^n [D_i u]_{\beta,w/\rho_0^2,\Omega_0} + [Lu]_{\beta,w/\rho_0^2,\Omega_0}\right).$$

Sea $d_0 = \mathrm{diam}(\Omega_0) = \sup_{x,y\in\Omega_0} d(x,y)$. Ahora, observamos que, como $\rho_0 \leq d_0$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y $B \in \mathcal{F}_\beta(\Omega_0)$, se tiene

$$\left(w/\rho_0^k\right)(B) \geq \frac{1}{d_0}\left(w/\rho_0^{k-1}\right)(B),$$

por lo que se deduce

$$[\cdot]_{\beta,w/\rho_0^k,\Omega_0} \leq d_0\,[\cdot]_{\beta,w/\rho_0^{k-1},\Omega_0}.$$

Entonces, se sigue

$$\left[D^2u\right]_{\beta,w/\rho_0^2,\Omega_0} \leq C\left(d_0^2\,[u]_{\beta,w,\Omega_0} + d_0\sum_{i=1}^n [D_i u]_{\beta,w/\rho_0,\Omega_0} + [Lu]_{\beta,w/\rho_0^2,\Omega_0}\right).$$

Luego, por el Lema 3.6.4, para cualquier $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, existe una constante C_ε que no depende de u o Ω_0, tal que

$$\begin{aligned}\left[D^2u\right]_{\beta,w/\rho_0^2,\Omega_0} &\leq C\left(d_0^2\,[u]_{\beta,w,\Omega_0} + d_0 n\left(C_\varepsilon\,[u]_{\beta,w,\Omega_0} + \varepsilon\left[D^2u\right]_{\beta,w/\rho_0^2,\Omega_0}\right) + [Lu]_{\beta,w/\rho_0^2,\Omega_0}\right)\\ &= C\left(d_0^2 + d_0 n C_\varepsilon\right)[u]_{\beta,w,\Omega_0} + \varepsilon d_0 n C\left[D^2u\right]_{\beta,w/\rho_0^2,\Omega_0} + C\,[Lu]_{\beta,w/\rho_0^2,\Omega_0}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando $\varepsilon \leq (2Cd_0n)^{-1}$, se obtiene

$$\left[D^2u\right]_{\beta,w/\rho_0^2,\Omega_0} \leq 2C\left(d_0^2 + d_0nC_\varepsilon + 1\right)\left([u]_{\beta,w,\Omega_0} + [Lu]_{\beta,w/\rho_0^2,\Omega_0}\right).$$

□

Ahora, dados un peso $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, para $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, definimos $[f]_{\beta,w,\rho^a} = [f]_{\beta,w,\rho^a,\Omega}$ como el ínfimo de las constantes positivas C tales que

$$\sup_{B\in\mathcal{F}_{\beta/5}} \frac{1}{w(B)}\int_B |f(x) - f_{B,\rho^a}|\,\rho(x)^a dx \leq C$$

y

$$\sup_{B\in\mathcal{F}_\beta-\mathcal{F}_{\beta/5}} \frac{1}{w(B)}\int_B |f(x)|\,\rho(x)^a dx \le C,$$

donde $f_{B,\rho^a} = \frac{1}{\rho^a(B)}\int_B f(x)\rho(x)^a dx$. Veremos que este espacio de funciones no es más que el espacio BMO^β_{w/ρ^a}.

Proposición 3.6.9. *Si $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ es un peso y $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, hay una constante $C > 0$, que solo depende de β y a, tal que*

$$C^{-1}\,[f]_{\beta,w,\rho^a} \le [f]_{\beta,w/\rho^a} \le C\,[f]_{\beta,w,\rho^a}\,.$$

Demostración. Sea $B \in \mathcal{F}_\beta$. Por el Lema 2.2.7 se tienen

$$\frac{C^{-1}}{(w/\rho^a)(B)}\int_B |f|\,dx \le \frac{1}{w(B)}\int_B |f|\,\rho^a dx \le \frac{C}{(w/\rho^a)(B)}\int_B |f|\,dx$$

y

$$\frac{C^{-1}}{(w/\rho^a)(B)}\int_B |f-f_B|\,dx \le \frac{1}{w(B)}\int_B |f-f_B|\,\rho^a dx \le \frac{C}{(w/\rho^a)(B)}\int_B |f-f_B|\,dx$$

con C dependiendo solo de a y β. Ahora, nuevamente debido al Lema 2.2.7, por un lado se tiene

$$\begin{aligned}
\int_B |f-f_B|\,\rho^a dx &\le \int_B |f-f_{B,\rho^a}|\,\rho^a dx + |f_{B,\rho^a}-f_B|\,\rho^a(B)\\
&\le \int_B |f-f_{B,\rho^a}|\,\rho^a dx + \frac{1}{|B|}\int_B |f-f_{B,\rho^a}|\,dx\ \rho^a(B)\\
&\le C\int_B |f-f_{B,\rho^a}|\,\rho^a dx,
\end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned}
\int_B |f-f_{B,\rho^a}|\,\rho^a dx &\le \int_B |f-f_B|\,\rho^a dx + |f_B-f_{B,\rho^a}|\,\rho^a(B)\\
&\le 2\int_B |f-f_B|\,\rho^a dx.
\end{aligned}$$

De este modo, la demostración es clara. □

Como una consecuencia de esta proposición y el Teorema 3.6.1, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.6.10. *Bajo las hipótesis del Teorema 3.6.1 se obtiene*

$$\left[D^2u\right]_{\beta,w,\rho_0^2,\Omega_0} \le C\left([u]_{\beta,w,\Omega_0} + [Lu]_{\beta,w,\rho_0^2,\Omega_0}\right),$$

donde C depende de β, w, n, ν, Ω_0, Ω, y los coeficientes $a_{i,j}$.

Observación 3.6.11. Sean Ω, Ω_0, ρ y ρ_0 como en el Teorema 3.6.1. Como $\rho_0 \leq \rho$, tenemos $\mathcal{F}_\beta(\Omega_0) \subset \mathcal{F}_\beta(\Omega)$, y luego, $A_p^\beta(\Omega) \subset A_p^\beta(\Omega_0)$, para todo $p \geq 1$. Sin embargo, no es necesariamente cierto que $BMO_w^\beta(\Omega)$ sea un subespacio de $BMO_w^\beta(\Omega_0)$. De hecho, los promedios de una función $f \in BMO_w^\beta(\Omega)$ sobre bolas "maximas"de $\mathcal{F}_\beta(\Omega_0)$ podrían no estar acotados uniformemente.

Conclusiones

Capítulo 2. Hemos logrado obtener los resultados análogos a los obtenidos por Fujii en [Fuj77], para la clase usual A_∞ de Muckenhoupt en $\mathbb{R}^n$, para nuestros pesos A_∞^{loc} en un entorno métrico más general que el euclídeo. Asimismo, conseguimos caracterizar a nuestra clase local con desigualdades correspondientes a las del Teorema 1 en [Fuj77]. En particular, nos fue útil obtener una desigualdad tipo Hölder inversa para pesos locales, la cual es una propiedad muy importante que satisfacen las clases de Muckenhoupt. Cabe mencionar importancia de la propiedad $\mathcal{P}$ y su vínculo con la duplicación. Esta propiedad, junto con la duplicación de la medida sobre bolas locales, nos permite inducir una estructura de espacio de tipo homogéneo sobre bolas β-locales para β suficientemente chico (con constantes independientes de cada bola). Además, en el hecho de que nuestros pesos puedan heredar tal duplicación posibilita que no haya necesidad de pedirle esta propiedad al espacio métrico y aplicar las resultados en [MS80] para trabajar sobre espacios de tipo homogéneo que si tengan esta propiedad y así, luego, llevar los resultados obtenidos en este entorno métrico a nuestro entorno original. Mencionamos también que, así como en [HSV19], se puede observar que la técnica de inducir en las bolas locales un espacio de tipo homogéneo, nos permite ver a nuestros pesos como pesos que satisfacen condiciones de Muckenhoupt sobre cada bola, lo cual, junto con la existencia de cubrimientos tipo Whitney con bolas locales para el abierto Ω considerado, muestra la posibilidad de descomponer a Ω en pequeños espacios de tipo homogéneo, estudiar el problema en cuestión allí, y luego ensamblar el espacio para obtener las propiedades buscadas en el conjunto total. Esto a veces es útil cuando ya se conocen resultados y propiedades buscadas sobre espacios de tipo homogéneo acotados. Por otra parte, la aparición de una clase $\mathcal{B}_p$ local nos ha permitido conseguir una caracterización para pesos en $A_\infty^\beta \cap \mathcal{B}_1^\beta$ por medio de la acotación de $L_w^\infty(\Omega)$ en BMO_w^β de las transformadas de Riesz β-locales. En relación a estas clases, es importante notar que sus correspondiente versiones no-locales (en $\mathbb{R}^n$) se definen mediante integración sobre los complementos de bolas con respecto a todo el espacio. Sin embargo, en contraposición a esto, en nuestras clases β-locales es suficiente tomar el complemento de cada bola β-local B con respecto a algún conjunto que se puede considerar como un "engordado" de la misma, a saber, $\mathcal{E}_\beta(B)$, $\mathcal{S}_\beta(B)$ o $\mathcal{N}_\beta(B)$. Estos conjuntos resultan ser sustitutos de las dilataciones de bolas β-locales "grandes" (bolas en $\mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_{\beta/N}$, para algún $N > 1$ fijo), las condiciones integrales sobre los complementos con respecto a cada uno de estos tipos de conjuntos generan clases de pesos $\mathcal{B}_p$ locales equivalentes y nos permiten considerar solo las propiedades de dichos pesos localmente, sin importarnos su comportamiento cerca de la frontera del abierto Ω.

Capítulo 3. Aplicando las técnicas usadas en [FFRV20], obtuvimos la acotación sobre BMO_w^β de integrales singulares β-locales, cuyo núcleo tiene integral nula sobre anillos, con una condición sobre el peso w que es equivalente a $A_\infty^\beta \cap \mathcal{B}_\delta^\beta$ (por los resultados del capítulo anterior), donde δ es el exponente de regularidad de la integral singular considerada, y más débil que la condición A_p^β, para $1 \leq p < 1+\delta/n$. También obtenemos la misma acotación para sus conmutadores con un multiplicador perteneciente a una versión local adecuada de los espacios LMO considerados en [SS06]. Aquí hemos pedido que el peso esté en la clase A_1^β ya que esta condición parece ser necesaria para que el producto de funciones en $LMO^\beta(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ con funciones en BMO_w^β esté en BMO_w^β. Siguiendo los mismos pasos que en [CFL91] llegamos a las acotaciones correspondientes para integrales singulares con núcleo variable y sus conmutadores. También hemos obtenido aproximación por funciones suaves, para funciones en LMO_0^β, en ciertas normas de tipo LMO^β interiores. Aquí se ha usado el clásico argumento de convolución para construir tales funciones suaves, el cual se usa en el contexto local cuando consideramos dominios interiores en el dominio total Ω. Todos estos resultados los aplicamos para obtener estimaciones apriori en normas BMO_w^β interiores para ecuaciones diferenciales elípticas en derivadas parciales de segundo orden con coeficientes en $LMO^\beta(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, siendo este tipo de estimación una versión pesada tanto dual como local de la obtenida en [SS06] sin pesos. Cabe mencionar que notamos que las integrales singulares, que aparecen en las demostraciones de los resultados de [SS06], son en esencia del tipo β-local cuando las derivadas de segundo orden de funciones con soporte en una bola β-local, consideradas al demostrar tales estimaciones apriori para derivadas de segundo orden, se evalúan solo en puntos de la bola. Por último, logramos también estimar las normas de las derivadas de primer orden que aparecen en dichas estimaciones, con lo que conseguimos que en nuestra estimación final solo aparezcan derivadas de segundo orden, mejorando así lo hecho en [SS06]. Notamos además que las normas BMO_{w/ρ^k}^β, con $k \in \mathbb{N}$ y ρ la función distancia al complemento de Ω, son equivalentes a un cierto tipo de norma BMO_w donde las integrales de las oscilaciones y los promedios son "moduladas" por la función ρ^k, llegando así a obtener nuestras estimaciones apriori interiores en este tipo de norma.

Trabajos pendientes. En [Saw83] y [Yab90] se ha considerado una clase de pesos más débil que la clase A_∞ de Muckenhoupt. En particular, en [Yab90] se vé que esta clase es casi necesaria para la validez de una estimación tipo Fefferman-Stein, la cual involucra operadores maximales. Como trabajo a futuro nos proponemos a estudiar una posible versión β-local de esta clase de pesos y su relación con una desigualdad tipo Fefferman-Stein que involucre las versiones β-locales de los operadores maximales considerados en [Yab90]. Otro tema de nuestro interés es el clásico resultado de dualidad entre los espacios BMO y los espacios H^1 de Hardy. Como otro posible trabajo a futuro estamos interesados en estudiar versiones con pesos β-locales de estos espacios de Hardy, definir los átomos correspondientes, determinar su descomposición atómica y probar que nuestros espacios BMO relacionados a un peso β-local son efectivamente los duales de estos espacios.

Bibliografía

[ABI05] Hugo Aimar, Ana Bernardis, and Bibiana Iaffei. Comparison of Hardy–Littlewood and dyadic maximal functions on spaces of homogeneous type. *Journal of mathematical analysis and applications*, 312(1):105–120, 2005.

[Acq92] Paolo Acquistapace. On *BMO* regularity for linear elliptic systems. *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)*, 161(1):231–269, 1992.

[Ada75] Robert A Adams. Sobolev spaces, volume 65 of. *Pure and applied mathematics*, 1975.

[Aim85] Hugo Aimar. Singular integrals and approximate identities on spaces of homogeneous type. *Transactions of the American Mathematical Society*, 292(1):135–153, 1985.

[AM84] Hugo Aimar and Roberto A Macías. Weighted norm inequalities for the hardy-littlewood maximal operator on spaces of homogeneous type. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 91(2):213–216, 1984.

[AM15] Ryan Alvarado and Marius Mitrea. Hardy spaces on ahlfors-regular quasi metric spaces. *Lecture Notes in Mathematics*, 2142, 2015.

[BCC93] Marco Bramanti and M Cristina Cerutti. $W_p^{1,2}$ solvability for the cauchy-dirichlet problem for parabolic equations with vmo coefficients. *Communications in partial differential equations*, 18(9-10):1735–1763, 1993.

[BF13] Marco Bramanti and Maria Stella Fanciullo. *BMO* estimates for nonvariational operators with discontinuous coefficients structured on Hörmander's vector fields on Carnot groups. *Adv. Differential Equations*, 18(9/10):955–1004, 2013.

[CD18] Maria Eugenia Cejas and Ricardo Duran. Weighted a priori estimates for elliptic equations. *Studia Mathematica*, 243:13–24, 2018.

[CF74] Ronald Coifman and Charles Fefferman. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. *Studia Mathematica*, 51:241–250, 1974.

[CFL91] Filippo Chiarenza, Michele Frasca, and Placido Longo. Interior $W^{2,p}$ estimates for nondivergence elliptic equations with discontinuous coefficients. *Ricerche Mat.*, 40(1):149–168, 1991.

[Chr90] Michael Christ. A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral. In *Colloquium Mathematicum*, volume 2, pages 601–628, 1990.

[CRW76] Ronald R Coifman, Richard Rochberg, and Guido Weiss. Factorization theorems for hardy spaces in several variables. *Annals of Mathematics*, 103(3):611–635, 1976.

[CVV18] Isolda Eugenia Cardoso, Pablo Sebastian Viola, and Beatriz Eleonora Viviani. Interior L^p-estimates and local A_p-weights. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 59(1):73–98, 2018.

[CZ89] Alberto Pedro Calderón and Antoni Zygmund. Singular integral operators and differential equations. In *Selected Papers of Antoni Zygmund*, pages 257–277. Springer, 1989.

[dG75] Miguel de Guzmán. *Differentiation of integrals in R^n*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 481. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975. With appendices by Antonio Córdoba, and Robert Fefferman, and two by Roberto Moriyón.

[DZ01] Javier Duoandikoetxea and Javier Duoandikoetxea Zuazo. *Fourier analysis*, volume 29. American Mathematical Soc., 2001.

[Eva10] Lawrence C Evans. *Partial differential equations*, volume 19. American Mathematical Soc., 2010.

[FFRV20] Elida Ferreyra, Guillermo Flores, Mauricio Ramseyer, and Beatriz Viviani. Endpoint estimates of commutators of singular integrals vs. conditions on the symbol. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 26(1):1–26, 2020.

[FM74] Charles Fefferman and Benjamin Muckenhoupt. Two nonequivalent conditions for weight functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 45(1):99–104, 1974.

[Fol99] Gerald B Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*, volume 40. John Wiley & Sons, 1999.

[FPW98] Bruno Franchi, Carlos Pérez, and Richard L Wheeden. Self-improving properties of John–Nirenberg and Poincaré inequalities on spaces of homogeneous type. *journal of functional analysis*, 153(1):108–146, 1998.

[FS72] Charles Fefferman and Elias M Stein. H^p spaces of several variables. *Acta math*, 129:137–193, 1972.

[Fuj77] Nobuhiko Fujii. Weighted bounded mean oscillation and singular integrals. *Math. Japon*, 22(5):529–534, 1977.

[Gra08] Loukas Grafakos. *Classical fourier analysis*, volume 2. Springer, 2008.

[GT83] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*, volume 224 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1983.

[Hei01] Juha Heinonen. *Lectures on analysis on metric spaces.* Springer Science & Business Media, 2001.

[HK12] Tuomas Hytönen and Anna Kairema. Systems of dyadic cubes in a doubling metric space. *Colloq. Math.*, 126(1):1–33, 2012.

[HMW73] Richard Hunt, Benjamin Muckenhoupt, and Richard Wheeden. Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform. *Transactions of the American Mathematical Society*, 176:227–251, 1973.

[HSV97] Eleonor Harboure, Oscar Salinas, and Beatriz Viviani. Boundedness of the fractional integral on weighted Lebesgue and Lipschitz spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 349(1):235–255, 1997.

[HSV14] Eleonor Harboure, Oscar Salinas, and Beatriz Viviani. Local maximal function and weights in a general setting. *Mathematische Annalen*, 358(3):609–628, 2014.

[HSV19] Eleonor Harboure, Oscar Salinas, and Beatriz Viviani. Local fractional and singular integrals on open subsets. *Journal d'Analyse Mathématique*, 138(1):301–324, 2019.

[Hua96] Qingbo Huang. Estimates on the Generalized Morrey Spaces $L_{\varphi}^{2,\lambda}$ and BMO_{ψ} for Linear Elliptic Systems. *Indiana University Mathematics Journal*, pages 397–439, 1996.

[KM83] L Kahanpää and L Mejlbro. *Some new results on the Muckenhoupt conjecture concerning weighted norm inequalities connecting the Hilbert transform with the maximal function.* Danmarks Tekniske Højskole. Matematisk Institut, 1983.

[Lor72] Alfredo Lorenzi. On elliptic equations with piecewise constant coefficients. II. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 26(4):839–870, 1972.

[LS10] Chin-Cheng Lin and Krzysztof Stempak. Local hardy–littlewood maximal operator. *Mathematische Annalen*, 348(4):797–813, 2010.

[Mor03] Marcela Morvidone. Weighted BMO_{ϕ} spaces and the Hilbert transform. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 44:1, 2003.

[MS79] Roberto A Macías and Carlos Segovia. Lipschitz functions on spaces of homogeneous type. *Advances in Mathematics*, 33(3):257–270, 1979.

[MS80] Roberto A Macías and Carlos Segovia. A well behaved quasi-distance for spaces of homogeneous type. *Cuadernos de Matemática y Mecánica*, 1980.

[Muc81] Benjamin Muckenhoupt. Norm inequalities relating the Hilbert transform to the Hardy-Littlewood maximal function. In *Functional Analysis and Approximation: Proceedings of the Conference held at the Mathematical Research Institute at Oberwolfach, Black Forest, August 9–16, 1980*, pages 219–231. Springer, 1981.

[MW76] Benjamin Muckenhoupt and Richard Wheeden. Weighted bounded mean oscillation and the Hilbert transform. *Studia Mathematica*, 3(54):221–237, 1976.

[NS06] Adam Nowak and Krzysztof Stempak. Weighted estimates for the hankel transform transplantation operator. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 58(2):277–301, 2006.

[Saw83] Eric Sawyer. Norm inequalities relating singular integrals and the maximal function. *Studia Mathematica*, 75:253–263, 1983.

[Sha15] Helene Shapiro. Linear algebra and matrices. *AMS, Providence, Rhode Island*, 2015.

[SS05] Yong Zhong Sun and Wei Yi Su. An endpoint estimate for the commutator of singular integrals. *Acta Mathematica Sinica*, 21(6):1249–1258, 2005.

[SS06] Yongzhong Sun and Weiyi Su. Interior h_1-estimates for second order elliptic equations with vanishing LMO coefficients. *Journal of Functional Analysis*, 234(2):235–260, 2006.

[SW16] Elias M Stein and Guido Weiss. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces (PMS-32), Volume 32. In *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces (PMS-32), Volume 32.* Princeton university press, 2016.

[TT16] Nguyen Ngoc Trong and Nguyen Thanh Tung. Weighted BMO type spaces associated to admissible functions and applications. *Acta Mathematica Vietnamica*, 41(2):209–241, 2016.

[Yab90] Kôzô Yabuta. Sharp maximal function and C_p condition. *Archiv der Mathematik*, 55:151–155, 1990.

[Zyg89] A Zygmund. On certain lemmas of Marcinkiewicz and Carleson. *Selected Papers of Antoni Zygmund*, pages 432–440, 1989.