ESTABILIZACIÓN CON BURBUJAS LIBRES DE RESIDUOS PARA PROBLEMAS DE ADVECCIÓN-DIFUSIÓN

Zocola, Itatí

Facultad de Ingeniería Química - UNL

Director: Morin, Pedro

Área: Ciencias Exactas

Palabras claves: Problemas de convección dominante, Burbujas libres de residuos, Estabilización.

INTRODUCCIÓN

Consideramos un dominio poligonal acotado Ω y un vector de dos componentes *a* con entradas constantes en Ω. Además, consideramos f, una función constante a trozos, definida en Ω. Sea ϵ una constante positiva, estudiamos el problema elíptico con valores en la frontera:

$$\begin{cases} -\epsilon\, \Delta u + a \cdot \nabla u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Este modelo, denominado de convección dominante cuando el valor de ϵ es considerablemente menor al módulo de *a*, es fundamental el estudio de fluidos dinámicos. Una de las particularidades que posee, es que deja en evidencia la debilidad de los métodos numéricos de aproximación clásicos, tales como el método de Galerkin para elementos finitos.

Con el objetivo de lograr estabilidad y precisión, en la década del 80, *Huges* junto a colegas introdujeron un nuevo método de elementos finitos (BROOKSANDT A.N., HUGHES J.R., 1982). El mismo se denomina *streamline upwind Petrov-Galerkin (SUPG)* y, básicamente, consiste en agregar al método clásico de Galerkin términos que dependan de los residuos en cada elemento de modo que mejoren la estabilidad global. A este proceso se lo llama *Residual-free bubbles (RFB).* Cabe mencionar que actualmente el método SUPG forma parte de los métodos estabilizadores, es estudiado y utilizado por múltiples autores (DOUGLAS J., WANG J., 1989) y (FRANCA L.P., HUGHES T.J.R., STENBERG R.,1993).

Título del proyecto: Métodos numéricos eficientes para ecuaciones diferenciales y aplicaciones.
Instrumento: CAI+D.
Año convocatoria: 2020.
Organismo financiador: UNL.
Director: Morin, Pedro.

OBJETIVOS

- Analizar y comparar en un ejemplo concreto los resultados obtenidos con el método de Galerkin y el de RFB.
- Proponer un método, basado en RFB, que estabilice satisfactoriamente los “picos” que usualmente se generan.
- Observar y estudiar la implementación computacional del método propuesto en el ejemplo elegido.

METODOLOGÍA

La etapa inicial de la investigación se centró en la lectura y estudio de bibliografía sobre métodos de Galerkin para elementos finitos, siendo (BRENNER S.C., RIDGWAY SCOTT L., 2008) nuestra referencia más importante. Para analizar las limitaciones del método en los problemas de convección dominante, nos enfocamos en los 2 siguientes, en una y dos dimensiones:

$$\begin{cases} -\epsilon\, u'' + au' = 1 & \text{en } (0,1), \\ u(0) = 0 \quad u(1) = 0. & \end{cases} \qquad \begin{cases} -\epsilon\, \Delta u + a\cdot\nabla u = 1 & \text{en } \Omega \doteq (0,1)\times(0,1), \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

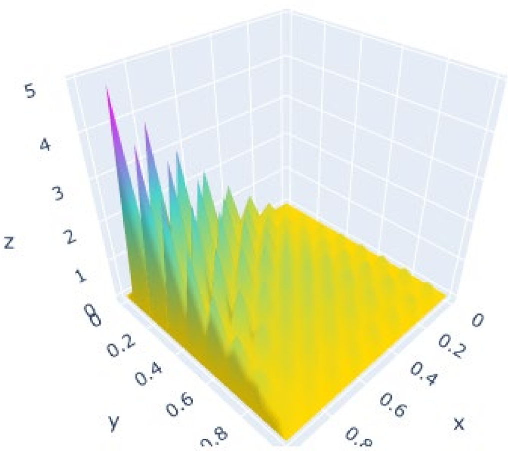
En la *Figura 1)a* podemos observar el resultado que se obtiene al implementar el método de Galerkin en dos dimensiones en el problema escogido con $a = 1/\sqrt{2}[1,1]$ y $\epsilon = 0.0001$. Es preciso mencionar que la programación fue realizada en lenguaje Julia y los gráficos obtenidos mediante la función *mesh3D* contenida en el paquete *PlotlyJS.*

Posteriormente, nos enfocamos en analizar el método RFB, para esto tomamos como guías a (BREZZI F., HUGHES T.J.R., MARINI L.D., RUSSO A., SULI E., 1999) y (CANGIANI A., 2004). En esencia, el método propone resolver en cada elemento el problema de convección dominada:

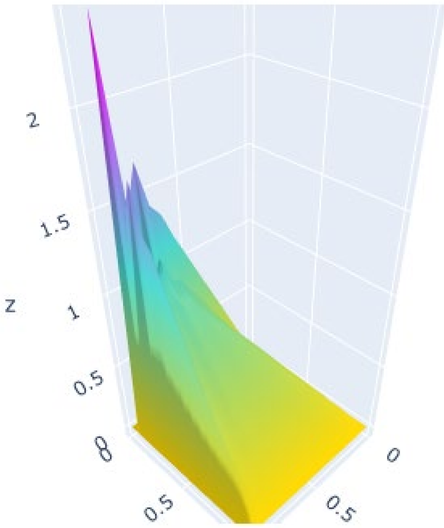
$$\begin{cases} -\epsilon\, \Delta\psi_T + a\cdot\nabla\psi_T = 1 & \text{en } T, \\ \psi_T = 0 & \text{en } \partial T. \end{cases}$$

Luego, este resultado se incorpora en cada elemento a lo obtenido a través del método de Galerkin. En la *Figura 1)b* se visualiza el gráfico correspondiente a esta solución.

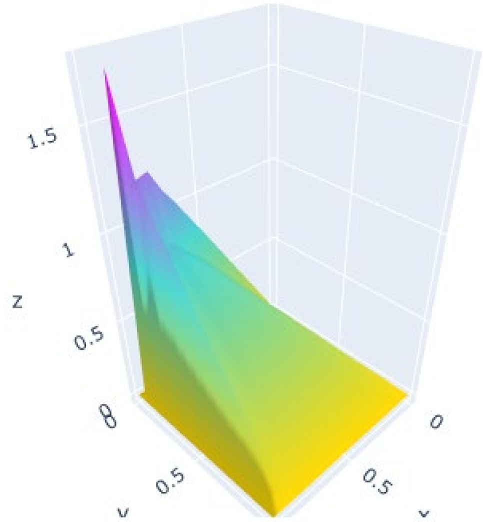
A raíz de las figuras, notamos que uno de los problemas en el método RFB es la rigidez que se genera sobre la frontera de cada elemento. Por lo tanto, propusimos una variación del último método. De forma concreta, continuamos con la idea de resolver el problema en burbujas, sin embargo, cada una de ellas compuesta por dos elementos adyacentes. De este modo, el dominio de cada burbuja es un cuadrilátero. La principal diferencia es que como resultado obtuvimos un sistema acoplado, ya que los cuadriláteros se solapan entre sí. Podemos observar la gráfica solución en la *Figura 1)c.*



a) Método Galerkin



b) Método RFB



c) Método propuesto

Figura 1

CONCLUSIONES

Mediante la implementación computacional, podemos observar que, para el problema escogido, el método propuesto presenta una solución más estable que la obtenida con el método RFB clásico. Los cambios notables se muestran en los saltos de altura que se generan sobre el pico más alto, ya que en el método propuesto la solución es más suave. Además, por los parámetros escogidos, la altura máxima a la cual debería llegar la solución es $\sqrt{2} \cong 1{,}4142$, en el método propuesto esto se logra con mayor precisión.

BIBLIOGRAFÍA

BRENNER S.C., RIDGWAY SCOTT L., 2008: The mathematical theory of finite element methods, Springer, Third edition.

BREZZI F., HUGHES T.J.R., MARINI L.D., RUSSO A., SULI E., 1999: A priori error analysis of the residual-free bubbles for advection-diffusion problems, Siam J. Numer. Anal, Vol 36, No. 6, pp 1933-1948

BROOKSANDT A.N., HUGHES J.R., 1982: Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.,Ed. 32, pp.199-259.

CANGIANI A., 2004: The residual-Free bubble method for problems with multiple scales, St Hugh's College, University of Oxford.

DOUGLAS J., WANG J., 1989: An absolutely stabilized finite element method for the Stokes problem, Math. Comp., Ed. 52,pp.495 508.

FRANCA L.P., HUGHES T.J.R., STENBERG R., 1993: Stabilized finite element methods for the Stokes problem, in Incompressible Computational Fluid Dynamics-Trends and Advances, M.D.Gunzburger and R.Nicolaides,eds.,Cambridge University Press,pp.87-107