

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

TESIS PRESENTADA COMO PARTE DE LOS REQUISITOS DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL PARA LA OBTENCIÓN DEL
GRADO ACADÉMICO DE

Doctor en Matemática

EN EL CAMPO DE: **Matemática Aplicada**

TÍTULO DE LA TESIS:

**REGULARIZACIÓN DE PROBLEMAS INVERSOS MAL
CONDICIONADOS, CALIFICACIÓN GENERALIZADA Y
SATURACIÓN GLOBAL**

INSTITUCIÓN DONDE SE REALIZÓ:

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral – IMAL

AUTOR:

Karina Guadalupe Temperini

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Rubén Daniel Spies

DEFENDIDA ANTE EL JURADO COMPUESTO POR:

Dr. Pablo M. Jacovkis

Dr. Domingo A. Tarzia

Dra. Cristina V. Turner

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2007

*A mi amor Daniel y a nuestros
hijos Matías y Joaquín*

Agradecimientos

A Dios y a la Virgen, por acompañarme en cada momento de mi vida. A mi esposo Daniel por su amor y su paciencia casi infinita. A mis hijos Matías y Joaquín por todos los momentos felices que me regalan cada día. A mis padres y a mis suegros porque sin su ayuda en el cuidado de mis hijos hubiese sido imposible realizar este doctorado. A mis amigos, en particular a Patricia, Daniel, Mónica y Gabriela, por su apoyo incondicional.

A mi director, Dr. Rubén Spies, por su gran profesionalismo y dedicación, por sus acertados consejos y por dejarme compartir su gusto por la matemática. Al CONICET por otorgarme la beca que me permitió realizar el doctorado. A los miembros del jurado por dedicar su tiempo a la lectura de esta tesis y por sus valiosas contribuciones. A mis profesores del doctorado, a mis compañeros del Instituto de Matemática Aplicada del Litoral y del Departamento de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias por haberme alentado en la realización de este postgrado. A la Dra. Bibiana Iaffei y al Dr. Hugo Aimar por haberme iniciado en el camino de la investigación. A mis amigos de la oficina, con quienes compartí momentos agradables y siempre estuvieron a mi lado cuando lo necesité. Gracias Gisela, Adriana, Ivana, Pamela, Marilina, Cecilia, Marisa, Eduardo, Nacho, Pablo, Aníbal, Luis, María y Fernando. A Lucas y a Leo, por ayudarme con los gráficos de la tesis. A Coca, Marcela y Alejandro por su buena onda y predisposición.

Índice General

Agradecimientos	II
Índice General	1
Resumen	9
Introducción	11
1. Preliminares	15
1.1. La Inversa Generalizada de Moore-Penrose	17
1.2. Operadores lineales compactos: expansión en valores singulares	19
1.2.1. Ejemplo: La ecuación del calor hacia atrás en el tiempo	24
1.3. Teoría espectral y cálculo funcional	26
2. Operadores de regularización	35
2.1. Definiciones y resultados básicos	35
2.2. Órdenes de convergencia	43
2.3. Regularización por proyección	51
2.3.1. El método de mínimos cuadrados	52
2.3.2. El método de mínimos cuadrados dual	56
2.4. El método de la inversa aproximada	61
3. Métodos de regularización espectrales	65
3.1. Definiciones y propiedades	65
3.1.1. Calificación	71
3.1.2. Resultados recíprocos	75
3.1.3. Saturación	80
3.2. Casos particulares	81
3.2.1. Descomposición en valores singulares truncada	81
3.2.2. Regularización de Tikhonov-Phillips	83
3.2.3. Método de Showalter o regularización asintótica	84
3.2.4. Métodos de filtro	87

4. Reglas de elección del parámetro	90
4.1. Reglas de elección del parámetro <i>a-priori</i>	91
4.2. Reglas de elección del parámetro <i>a-posteriori</i> : el Principio de Discrepancia de Morozov	93
4.3. Reglas heurísticas de elección del parámetro	103
4.3.1. El criterio de la curva L	104
4.3.2. Validación cruzada generalizada	105
5. Divergencia con velocidad arbitraria del método de mínimos cuadrados en dimensión infinita	107
5.1. Divergencia para problemas inversos con datos exactos	108
5.2. Divergencia para problemas inversos con datos perturbados	127
6. Saturación global de métodos de regularización arbitrarios	129
6.1. Cotas de convergencia para métodos de regularización	131
6.2. Saturación global	139
6.3. Saturación de métodos de regularización espectrales	146
6.3.1. Métodos espectrales con calificación clásica	146
6.3.2. Métodos espectrales con calificación máxima	153
7. Calificación generalizada y niveles de calificación para métodos de regularización espectrales	163
7.1. Pares fuente-orden y orden-fuente. Calificación generalizada. Niveles de calificación.	164
7.2. Ejemplos	174
7.3. Órdenes de convergencia, resultados recíprocos y conjuntos fuente maximales	180
8. Aplicaciones y resultados numéricos	187
8.1. La ecuación lateral del calor	188
8.2. La ecuación del calor hacia atrás en el tiempo	196
8.2.1. Resolución del problema BHE por el método de la inversa aproximada	197
8.2.2. Resolución del problema BHE por métodos espectrales	206
8.3. Restauración de imágenes	217
8.4. La calificación como orden de convergencia óptimo en restauración de imágenes	232
Conclusiones y trabajos futuros	238
Referencias Bibliográficas	242

Índice de figuras

2.1. Error de regularización, error asociado al ruido y error total vs. parámetro de regularización α para δ fijo.	44
5.1. Orden de recursión usado para la construcción de las sucesiones $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$, en el Teorema 5.4.	116
7.1. Relación entre los diferentes niveles de calificación, la calificación clásica y la definida en [44].	181
8.1. Núcleo de reconstrucción en $t = 0$ con $\gamma = 0,02$	191
8.2. Evolución de la temperatura correspondiente al flujo a derecha $f(t)$. . .	192
8.3. Solución exacta (- - -) y solución reconstruída (—) a partir del dato exacto con $N = 300$, $M = 20$ y $\gamma = 0,02$	193
8.4. Solución exacta (- - -) y solución reconstruída (—) a partir de un dato perturbado con un 1% de nivel de ruido ($k = 1$), $N = 300$, $M = 20$ y $\gamma = 0,04$	194
8.5. Solución exacta (- - -) y solución reconstruída (—) a partir de un dato perturbado con un 3% de nivel de ruido ($k = 3$), $N = 400$, $M = 20$ y $\gamma = 0,045$	195
8.6. Solución exacta (- - -) y solución reconstruída (—) a partir de un dato perturbado con ruido $r(t) = 0,005 \text{ sen}(100t)$, $N = 300$, $M = 20$ y $\gamma = 0,035$	195

8.7. Evolución de la temperatura $u(x, t)$ con temperatura inicial f_2	199
8.8. Solución obtenida invirtiendo el operador K a partir de un dato exacto.	200
8.9. Núcleo de reconstrucción $\psi_\gamma^{s_{30}}(x)$ con $\gamma = 0,04$	201
8.10. Solución exacta f_1 (- - -) y solución reconstruída (—) a partir del dato exacto con $N = 55$, $M = 6$, $T = 1$ y $\gamma = 0,04$	201
8.11. Solución exacta f_2 (- - -) y solución reconstruída (—) a partir del dato exacto con $N = 55$, $M = 6$, $T = 1$ y $\gamma = 0,035$	202
8.12. Solución exacta f_3 (- - -) y solución reconstruída (—) a partir del dato exacto con $N = 55$, $M = 6$, $T = 1$ y $\gamma = 0,012$	202
8.13. Solución exacta (- - -) y solución reconstruída (—) a partir de un dato perturbado con un 5% de nivel de ruido ($k = 5$), $N = 35$, $M = 2$, $\gamma = 0,018$ y $T = 1$	203
8.14. Solución exacta (- - -) y solución reconstruída (—) a partir de un dato perturbado con un 3% de nivel de ruido ($k = 3$), $N = 55$, $M = 2$, $\gamma = 0,042$ y $T = 1$	204
8.15. Solución exacta (- - -) y solución reconstruída (—) a partir del dato exacto con $N = 55$, $M = 2$, $\gamma = 0,015$ y $T = 11$	205
8.16. Solución exacta (- - -) y solución reconstruída (—) a partir de dato perturbado con un 2% de nivel de ruido ($k = 2$), $N = 65$, $M = 2$, $\gamma = 0,005$ y $T = 2$	205
8.17. Curva L para el método de Tikhonov-Phillips con dato exacto.	207
8.18. Función VCG para el método de Tikhonov-Phillips con dato exacto. . .	207
8.19. Solución exacta (- - -) y solución regularizada (—) con el método de Tikhonov-Phillips a partir del dato exacto con $\alpha = 1,3978 \cdot 10^{-15}$	208
8.20. Solución exacta (- - -) y solución regularizada (—) con el método de Tikhonov-Phillips a partir del dato exacto con $\alpha = 10^{-30}$	208

8.21. Curva L para el método TSVD con dato exacto.	210
8.22. Función VCG para el método TSVD con dato exacto.	210
8.23. Solución exacta (- - -) y solución regularizada (—) con el método TSVD a partir del dato exacto con $\alpha = 1,3888 \cdot 10^{-11}$, dado por la curva L . . .	211
8.24. Solución exacta (- - -) y solución regularizada (—) con el método TSVD a partir del dato exacto con $\alpha = 6,6397 \cdot 10^{-36}$, dado por VCG.	211
8.25. Solución obtenida invirtiendo el operador K a partir de un dato perturbado con un 1 % de nivel de ruido.	212
8.26. Solución obtenida invirtiendo el operador K a partir de un dato perturbado con un 3 % de nivel de ruido.	213
8.27. Curva L para el método de Tikhonov-Phillips para dato perturbado con un 1 % de nivel de ruido.	213
8.28. Curva L para el método de Tikhonov-Phillips para dato perturbado con un 3 % de nivel de ruido.	214
8.29. Solución exacta (- - -) y solución regularizada (—) con el método de Tikhonov-Phillips a partir de un dato perturbado con 1 % de nivel de ruido y $\alpha = 0,0017$	214
8.30. Solución exacta (- - -) y solución regularizada (—) con el método de Tikhonov-Phillips a partir de un dato perturbado con 3 % de nivel de ruido y $\alpha = 0,0035$	215
8.31. Solución exacta (- - -) y solución regularizada (—) con el método de Tikhonov-Phillips a partir de un dato perturbado con 1 % de nivel de ruido y $\alpha = 10^{-6}$	216
8.32. Solución exacta (- - -) y solución regularizada (—) con el método de Showalter a partir de un dato perturbado con 1 % de nivel de ruido y $\alpha = 10^{-6}$	216

8.33. Luna Io de Júpiter (512 × 512 píxeles). Extraída de: http://www2.imm.dtu.dk/~pch/HNO/.	221
8.34. Imagen original: luna Io en escala de grises.	222
8.35. Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$. . .	222
8.36. Imagen degradada por desenfoque uniforme con $R = 8$	223
8.37. Imagen degradada por movimiento horizontal de longitud $L = 12$	223
8.38. Imagen degradada por movimiento vertical de longitud $L = 12$	224
8.39. Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ (izq.) y solución que resulta de invertir el operador (der.).	224
8.40. Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ (izq.) y solución regularizada con el método de Tikhonov-Phillips y $\alpha = 0,1$ (der.)	226
8.41. Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ (izq.) y solución regularizada con el método del Ejemplo 4 de la Sección 7.2 y $\alpha = 0,1$ (der.).	226
8.42. Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ (izq.) y solución regularizada con el método del Ejemplo 9 de la Sección 7.2 y $\alpha = 0,1$ (der.).	227
8.43. Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ (izq.) y solución regularizada con el método de Tikhonov-Phillips y $\alpha = 10^{-10}$ (der.).	227
8.44. Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ (izq.) y solución regularizada con el método del Ejemplo 4 de la Sección 7.2 y $\alpha = 10^{-10}$ (der.).	228

8.45. Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ (izq.) y solución regularizada con el método del Ejemplo 9 de la Sección 7.2 y $\alpha = 10^{-10}$ (der.).	228
8.46. Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ y ruido del 1 % (izq.) y solución regularizada con el método de Tikhonov-Phillips y $\alpha = 0,1$ (der.).	229
8.47. Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ y ruido del 1 % (izq.) y solución regularizada con el método del Ejemplo 4 de la Sección 7.2 y $\alpha = 0,1$ (der.).	230
8.48. Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ y ruido del 1 % (izq.) y solución regularizada con el método del Ejemplo 9 de la Sección 7.2 y $\alpha = 0,1$ (der.).	230
8.49. Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ y ruido del 1 % (izq.) y solución regularizada con el método de Tikhonov-Phillips y $\alpha = 0,9$ (der.).	231
8.50. Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ y ruido del 1 % (izq.) y solución regularizada con el método del Ejemplo 4 de la Sección 7.2 y $\alpha = 0,9$ (der.).	231
8.51. Imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ y ruido del 1 % (izq.) y solución regularizada con el método del Ejemplo 9 de la Sección 7.2 y $\alpha = 0,9$ (der.).	232
8.52. Imágenes: luna (512×512 píxeles) (izq.), mar (128×128 píxeles) (centro) y arco iris (64×64 píxeles) (der.).	233
8.53. Imagen original luna (izq.) e imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ (der.).	234

8.54. Imagen original mar (izq.) e imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ (der.).	234
8.55. Imagen original arco iris (izq.) e imagen degradada por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ (der.).	235
8.56. Errores de regularización y calificación óptima del método de Tikhonov-Phillips.	235
8.57. Errores de regularización y calificación óptima del método del Ejemplo 4 de la Sección 7.2.	236
8.58. Errores de regularización y calificación fuerte del método del Ejemplo 9 de la Sección 7.2.	236