

# Capítulo 1

## Preliminares

En un contexto bastante general, un problema inverso se puede formular como la necesidad de determinar  $x$  en una ecuación de la forma

$$Tx = y, \tag{1.1}$$

donde  $T$  es un operador lineal y acotado entre dos espacios de Hilbert  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  e  $y$  es un dato dado. Muy a menudo, los problemas inversos no satisfacen los postulados de Hadamard de buen condicionamiento (“well-posedness”). Estos son

- (P1) Existencia: Para todo dato admisible, existe una solución.
- (P2) Unicidad: Para todo dato admisible, la solución es única.
- (P3) Dependencia continua: La solución depende continuamente de los datos.

Un problema matemático que viole al menos uno de estos postulados se dice “*mal condicionado*” (“ill-posed”).

Se dice que  $y$  es *alcanzable* si  $y \in \text{Ran}(T)$ . Luego, (P1) es equivalente a que todo  $y \in \mathcal{Y}$  sea alcanzable, es decir que  $\text{Ran}(T) = \mathcal{Y}$ . El postulado (P2) se satisface si y sólo si  $N(T) = \{0\}$ . Si se cumplen (P1) y (P2), existe  $T^{-1}$  y (P3) es equivalente a la continuidad (o acotación) de  $T^{-1}$ . Sin embargo, muy a menudo es muy restrictivo suponer que  $y \in \text{Ran}(T)$  y que  $N(T) = \{0\}$ , pues aún en estos casos se puede estar

interesado en una “solución generalizada” (en algún sentido preciso) que resuelva  $Tx = y$  en un sentido aproximado. Como veremos más adelante esta noción generalizada de solución está fuertemente relacionada con el concepto de inversa generalizada de Moore-Penrose del operador  $T$ , la cual será introducida en la Sección 1.1.

En el modelado de una gran variedad de problemas inversos tales como procesamiento de señales e imágenes, transferencia de calor, reología, fluorescencia, etc., surgen de manera natural ecuaciones integrales de Fredholm de primera clase, las cuales están asociadas a operadores integrales que bajo ciertas condiciones bastante generales resultan compactos. Por ello, en la Sección 1.2 introducimos el concepto de “sistema singular” para operadores lineales compactos y estudiamos propiedades de la inversa generalizada de Moore-Penrose de este tipo de operadores.

En la práctica, y por las razones antes mencionadas, la principal causa del mal condicionamiento de un problema es la violación del postulado  $(P3)$ . Esto se traduce en inestabilidad cuando se emplean métodos numéricos tradicionales para aproximar las soluciones. Para restablecer la estabilidad es necesario la aplicación de “métodos de regularización”, los cuales consisten, esencialmente, en aproximar el problema mal condicionado por una familia convenientemente construida de problemas “bien condicionados”. No obstante se debe tener siempre presente que ningún truco matemático puede hacer estable un problema que es inherentemente inestable. Todo lo que un método de regularización puede hacer es recuperar información parcial acerca de la solución, de modo tan estable como sea posible. En la Sección 1.3 se presentan conceptos y resultados básicos de Teoría Espectral de Operadores en espacios de Hilbert y Cálculo Funcional, los cuales serán necesarios para la construcción de ciertos métodos de regularización basados en la noción de “función de un operador autoadjunto”.

## 1.1. La Inversa Generalizada de Moore-Penrose

La inversa generalizada de Moore-Penrose provee un marco matemático adecuado para la definición de soluciones generalizadas y el tratamiento de problemas mal condicionados. Como veremos, esta inversa está fuertemente relacionada con las soluciones de mínimos cuadrados del problema (1.1).

Un elemento  $x_0 \in \mathcal{X}$  se denomina *solución de mínimos cuadrados* (s.m.c.) de (1.1) si

$$\|Tx_0 - y\| = \inf_{z \in \mathcal{X}} \|Tz - y\|. \quad (1.2)$$

Si además  $x_0$  es tal que

$$\|x_0\| = \inf_{z \text{ s.m.c. de } Tx=y} \|z\|, \quad (1.3)$$

se denomina *mejor solución aproximada* (m.s.a.) de  $Tx = y$ , es decir, la m.s.a. es la solución de mínimos cuadrados de mínima norma.

Definimos ahora la inversa generalizada de Moore-Penrose del operador  $T$  restringiendo su dominio y su rango de tal manera que el operador restringido resultante  $\tilde{T}$  sea invertible. Más precisamente, sea  $\tilde{T} \doteq T|_{N(T)^\perp} : N(T)^\perp \rightarrow \text{Ran}(T)$ . Claramente  $\tilde{T}$  así definido es biyectivo. La inversa generalizada de Moore-Penrose  $T^\dagger$  de  $T$  se define como la única extensión lineal de  $\tilde{T}^{-1}$  al dominio

$$\text{Dom}(T^\dagger) \doteq \text{Ran}(T) \oplus \text{Ran}(T)^\perp$$

que satisface  $N(T^\dagger) = \text{Ran}(T)^\perp$ . Se extiende  $\tilde{T}^{-1} : \text{Ran}(T) \rightarrow N(T)^\perp$  a

$$T^\dagger : \text{Ran}(T) \oplus \text{Ran}(T)^\perp \rightarrow N(T)^\perp$$

de tal manera que  $T^\dagger y \doteq \tilde{T}^{-1}y_1$ , donde  $y = y_1 + y_2$  con  $y_1 \in \text{Ran}(T)$  y  $y_2 \in \text{Ran}(T)^\perp$ .

A continuación enunciamos algunas propiedades de la inversa generalizada de Moore-Penrose. Dado que estos son resultados clásicos bastante conocidos no incluimos las

correspondientes demostraciones aquí. Para el lector interesado, estas pueden encontrarse, por ejemplo, en [12], [34].

**Proposición 1.1.** *Sean  $P$  y  $Q$  las proyecciones ortogonales sobre  $N(T)$  y  $\overline{\text{Ran}(T)}$ , respectivamente. Entonces  $\text{Ran}(T^\dagger) = N(T)^\perp$  y se satisfacen las cuatro ecuaciones de Moore-Penrose:*

$$TT^\dagger T = T, \quad (1.4)$$

$$T^\dagger TT^\dagger = T^\dagger, \quad (1.5)$$

$$T^\dagger T = I - P, \quad (1.6)$$

$$TT^\dagger = Q|_{\text{Dom}(T^\dagger)}. \quad (1.7)$$

Claramente, las ecuaciones (1.6) y (1.7) implican (1.4) y (1.5). Se puede probar que las ecuaciones de Moore-Penrose caracterizan unívocamente a  $T^\dagger$ .

**Proposición 1.2.** *El operador  $T^\dagger$  es cerrado. Además,  $T^\dagger$  es acotado si y sólo si  $\text{Ran}(T)$  es cerrado.*

El siguiente teorema pone en evidencia la relación entre las soluciones de mínimos cuadrados y la inversa generalizada de Moore-Penrose.

**Teorema 1.3.** *Si  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$ , entonces  $Tx = y$  tiene una única mejor solución aproximada dada por  $x^\dagger \doteq T^\dagger y$ . El conjunto  $S$  de todas las soluciones de mínimos cuadrados está dado por  $S = x^\dagger + N(T)$ .*

Es importante observar que la inversa generalizada de Moore-Penrose de  $T$  es entonces el operador solución que mapea  $y$  sobre la mejor solución aproximada del problema  $Tx = y$  (siempre que  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$ ). Denotaremos con  $T^*$  al operador adjunto de  $T$ .

**Teorema 1.4.** *Si  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$ , entonces  $z \in \mathcal{X}$  es una solución de mínimos cuadrados de  $Tx = y$  si y sólo si satisface la “ecuación normal”*

$$T^*Tz = T^*y. \quad (1.8)$$

De este resultado se sigue que  $T^\dagger y$  es también la mejor solución aproximada del problema  $T^*Tz = T^*y$ , es decir,

$$T^\dagger = (T^*T)^\dagger T^*. \quad (1.9)$$

Se puede probar además que si  $y \notin \text{Dom}(T^\dagger)$ , entonces no existen soluciones de mínimos cuadrados de  $Tx = y$ . Por otra parte, si  $\text{Dom}(T^\dagger) = \mathcal{Y}$ , entonces  $\text{Ran}(T)$  es cerrado y se sigue de la Proposición 1.2 que en tal caso  $T^\dagger$  es acotado, es decir, el problema (1.1) es bien condicionado.

## 1.2. Operadores lineales compactos: expansión en valores singulares

En esta sección presentaremos y analizaremos la expansión en valores singulares para operadores compactos, necesaria para estudiar varias propiedades de la inversa generalizada de Moore-Penrose de este tipo de operadores. Por ejemplo, los operadores asociados a ecuaciones integrales de Fredholm de primera especie, son “casi siempre” compactos. Más precisamente, sean  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  un conjunto compacto y medible Jordan y  $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$  ó  $k$  débilmente singular (esto es,  $k$  es continuo sobre  $\{(s, t) \in \Omega \times \Omega : s \neq t\}$  y  $\forall s \neq t \in \Omega, |k(s, t)| \leq \frac{M}{|s-t|^{n-\epsilon}}$  con  $M > 0, \epsilon > 0$ ). Entonces el operador

$$\begin{aligned} K : L^2(\Omega) &\rightarrow L^2(\Omega) \\ x(\cdot) &\rightarrow (Kx)(s) \doteq \int_{\Omega} k(s, t)x(t)dt \end{aligned} \quad (1.10)$$

es compacto (ver [60], pág. 277).

De aquí en adelante denotaremos con  $K$  a operadores lineales compactos. Si  $K$  es además autoadjunto, entonces existe un *autosistema*  $\{(\lambda_n; u_n)\}$  asociado a  $K$ , donde  $\lambda_n$  son los autovalores no nulos de  $K$  (los autovalores son reales por ser  $K$  autoadjunto) y  $u_n$  sus correspondientes autovectores. Utilizando este autosistema, el operador  $K$  se puede “diagonalizar” de la siguiente manera:

$$Kx = \sum_n \lambda_n \langle x, u_n \rangle u_n, \quad \forall x \in \mathcal{X}. \quad (1.11)$$

Si  $K$  no es autoadjunto, entonces puede no tener autovalores y por lo tanto, puede no existir un autosistema asociado a  $K$ . No obstante, en este caso se puede sustituir el autosistema por lo que llamaremos *sistema singular*, el que puede usarse de manera análoga para “diagonalizar” el operador  $K$ .

**Definición 1.5.** Sea  $K : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un operador lineal compacto (no necesariamente autoadjunto). Un *sistema singular asociado a  $K$*  es una familia de la forma  $\{(\sigma_n; u_n, v_n)\}$  donde:

- $\{\sigma_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$  son los autovalores no nulos de  $K^*K$  (y de  $KK^*$ ), escritos en orden decreciente con su multiplicidad. La raíz cuadrada positiva de cada autovalor, es decir  $\sigma_n$ , se denomina *valor singular de  $K$* ,
- $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un sistema ortonormal completo de autovectores de  $K^*K$  (que expande  $\overline{\text{Ran}(K^*)} = \overline{\text{Ran}(K^*K)}$ ) y
- $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un sistema ortonormal completo de autovectores de  $KK^*$  (que expande  $\overline{\text{Ran}(K)} = \overline{\text{Ran}(KK^*)}$ ); están dados por

$$v_n \doteq \frac{Ku_n}{\|Ku_n\|}.$$

Es importante observar que  $K^*K$  es no negativo (acretivo), pues  $\langle K^*Kx, x \rangle = \|Kx\|^2 \geq 0$  para todo  $x$  y por ello, sus autovalores son no negativos. Además, como

$K$  es compacto, el operador  $K^*K$  también lo es y por lo tanto tiene a lo sumo una cantidad numerable de autovalores que se pueden acumular únicamente en cero (ver Teorema 6.7, [64]).

Se satisfacen las siguientes fórmulas:

$$Ku_n = \sigma_n v_n \quad (1.12)$$

$$K^*v_n = \sigma_n u_n \quad (1.13)$$

$$Kx = \sum_n \sigma_n \langle x, u_n \rangle v_n, \quad x \in \mathcal{X} \quad (1.14)$$

$$K^*y = \sum_n \sigma_n \langle y, v_n \rangle u_n, \quad y \in \mathcal{Y}, \quad (1.15)$$

(donde, en el caso de infinitos valores singulares, las series convergen en las normas de los espacios de Hilbert  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$ , según corresponda). Las expresiones (1.14) y (1.15) se denominan “expansión en valores singulares” (de  $K$  y  $K^*$ , respectivamente) y son los análogos en dimensión infinita de la descomposición en valores singulares de una matriz.

El rango del operador  $K$  tiene dimensión finita si y sólo si  $K$  tiene un número finito de valores singulares. Por ejemplo, el operador integral definido por (1.10) donde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  es un conjunto compacto y medible Jordan con medida positiva y el núcleo  $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$ , tiene rango de dimensión finita si y sólo si  $k$  es *degenerado*, es decir, si se puede escribir como

$$k(s, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(s) \psi_i(t), \quad s, t \in \Omega, \quad (1.16)$$

con  $n \in \mathbb{N}$  y  $\varphi_i, \psi_i \in L^2(\Omega)$ . Se puede probar además que  $\text{Ran}(K)$  es cerrado si y sólo si tiene dimensión finita, lo cual junto con la Proposición 1.2 implica el siguiente resultado, de particular relevancia en el contexto del estudio de problemas mal condicionados.

**Proposición 1.6.** *Sea  $K : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un operador lineal compacto, con  $\dim(\text{Ran}(K)) = \infty$ . Entonces  $K^\dagger$  es un operador lineal cerrado no acotado (i.e. no continuo) densamente definido.*

Luego, para un operador lineal compacto con rango no cerrado (por ejemplo para un operador integral del tipo (1.10) con un núcleo en  $L^2$  no degenerado) la mejor solución aproximada de  $Kx = y$  no depende continuamente del dato  $y$ , y por lo tanto, la ecuación es mal condicionada.

Usando el sistema singular asociado a un operador compacto se puede hallar una representación en serie de la inversa generalizada de Moore-Penrose de dicho operador. En efecto, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 1.7.** *Sea  $K$  un operador lineal compacto con sistema singular  $\{(\sigma_n; u_n, v_n)\}$ ,  $y \in \mathcal{Y}$ . Entonces,*

$$i) \quad y \in \text{Dom}(K^\dagger) \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle y, v_n \rangle|^2}{\sigma_n^2} < \infty. \quad (1.17)$$

$$ii) \text{ Para } y \in \text{Dom}(K^\dagger), \quad K^\dagger y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y, v_n \rangle}{\sigma_n} u_n. \quad (1.18)$$

Es importante notar que la primera parte de este Teorema provee una condición necesaria y suficiente para la existencia de una mejor solución aproximada, conocida como *criterio de Picard*: existe una mejor solución aproximada de  $Kx = y$  si y sólo si los coeficientes de Fourier generalizados  $\langle y, v_n \rangle$  de  $Qy \in \overline{\text{Ran}(K)}$  con respecto a las funciones singulares  $v_n$  decrecen suficientemente rápido respecto de los valores singulares  $\sigma_n$ .

Nos preguntamos ahora qué puede ocurrir con respecto a la estabilidad de la solución. La descomposición en valores singulares (1.18) de la inversa generalizada de Moore-Penrose de  $K$ , permite ver cómo los errores en el dato  $y$  afectan a la mejor



solución aproximada  $K^\dagger y$ . Las componentes del error (con respecto a la base  $\{v_n\}$ ) que correspondan a valores singulares grandes (valores de  $n$  pequeños) son inofensivas, mientras que las correspondientes a valores singulares  $\sigma_n$  pequeños (valores de  $n$  grandes) se amplifican por un factor  $1/\sigma_n$  y por ello son peligrosas. Si  $\dim(\text{Ran}(K)) < \infty$ , en cuyo caso  $\text{Ran}(K)$  es cerrado y  $K^\dagger$  es acotado, sólo hay un número finito de valores singulares y estos factores de amplificación al menos están acotados (aunque aún así podrían ser muy grandes). Sin embargo, si  $\dim(\text{Ran}(K)) = \infty$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$  y un error en el dato de un tamaño fijo se puede amplificar por un factor arbitrariamente grande (pues  $1/\sigma_n$  crece sin cota). Por ejemplo, si  $y_{\delta,n} \doteq y + \delta v_n$ , entonces  $\|y_{\delta,n} - y\| = |\delta|$  y sin embargo de (1.18) se sigue que

$$K^\dagger y - K^\dagger y_{\delta,n} = -\frac{\langle \delta v_n, v_n \rangle}{\sigma_n} u_n = -\frac{\delta}{\sigma_n} u_n,$$

por lo que

$$\|K^\dagger y - K^\dagger y_{\delta,n}\| = \frac{|\delta|}{\sigma_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Luego, un error en el dato de magnitud  $|\delta|$  produce un error de magnitud  $\frac{|\delta|}{\sigma_n}$  en la solución. Claramente, la inestabilidad es más severa cuanto más rápido decrecen a cero los valores singulares. La velocidad con la cual  $\sigma_n$  tiende a cero permite cuantificar el *grado de mal condicionamiento* del problema  $Kx = y$ . Así, si  $\sigma_n = O(n^{-\alpha})$  para algún  $\alpha > 0$  se dice que el problema es “*débilmente mal condicionado*” y “*severamente mal condicionado*” en otro caso. Por ejemplo si  $\sigma_n = O(e^{-n})$ , entonces decimos que el problema es severamente mal condicionado.

A continuación presentamos un ejemplo asociado a un problema en conducción de calor que nos permitirá visualizar de mejor manera las definiciones y conceptos precedentes.

### 1.2.1. Ejemplo: La ecuación del calor hacia atrás en el tiempo

Los problemas “directos” en conducción de calor son los problemas clásicos que consisten en calcular la evolución temporal o la distribución espacial, en un cierto tiempo final prefijado, de la temperatura de un cuerpo dados los parámetros térmicos, la distribución inicial de la temperatura del mismo y las condiciones de frontera. Es bien sabido que todos estos problemas, bajo condiciones bien generales, son bien condicionados en el sentido de Hadamard.

Plantaremos a continuación un problema inverso conocido como *ecuación del calor hacia atrás en el tiempo* (“backwards heat equation”), el cual nos conducirá a una ecuación integral de primera clase con un operador integral compacto. Por simplicidad, consideraremos sólo el caso unidimensional. Supongamos que  $u(x, t)$  es solución de la ecuación de difusión en un sólido unidimensional homogéneo  $\Omega = [0, \pi]$ ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \quad x \in [0, \pi], \quad t > 0, \quad (1.19)$$

con condiciones de borde de tipo Dirichlet homogéneas:

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (1.20)$$

de modo que  $u(x, t)$  denota la temperatura del punto  $x$  en el instante de tiempo  $t$ . Nuestro problema consiste en, dada la temperatura final en  $t = T$

$$g(x) \doteq u(x, T), \quad x \in [0, \pi], \quad (1.21)$$

con  $g(0) = g(\pi) = 0$ , determinar la temperatura inicial

$$f(x) \doteq u(x, 0), \quad x \in [0, \pi]. \quad (1.22)$$

Usando la técnica usual de separación de variables se obtiene inmediatamente que la solución del problema directo (1.19), (1.20), (1.22) está dada por

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \text{sen}(nx) \int_0^{\pi} f(\tau) \text{sen}(n\tau) d\tau, \quad x \in [0, \pi], \quad t > 0.$$

Luego, se deduce de (1.21) que

$$g(x) = \int_0^\pi k(x, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (1.23)$$

donde

$$k(x, \tau) \doteq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 T} \operatorname{sen}(n\tau) \operatorname{sen}(nx).$$

Definiendo el operador integral

$$\begin{aligned} K : L^2[0, \pi] &\rightarrow L^2[0, \pi] \\ f(\cdot) &\rightarrow (Kf)(x) \doteq \int_0^\pi k(x, \tau) f(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.24)$$

se tiene entonces que el problema inverso consiste en resolver la ecuación integral de primera clase (1.23), es decir,

$$Kf = g. \quad (1.25)$$

Como  $[0, \pi]$  es compacto y  $k(x, \tau) \in L^2([0, \pi] \times [0, \pi])$  resulta que el operador  $K$  es compacto (ver 1.10). Además, puesto que  $k(x, \tau)$  es *no degenerado* (ver (1.16)), el problema inverso (1.25) es en efecto mal condicionado, a pesar de que en este caso  $K$  es inyectivo. Dado que  $K$  es además autoadjunto, el sistema singular asociado al operador  $K$  es

$$\left\{ \left( e^{-n^2 T}; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}(nx), \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}(nx) \right) \right\}.$$

Sea  $g_n \doteq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi g(\tau) \operatorname{sen}(n\tau) d\tau$  el  $n$ -ésimo coeficiente de Fourier generalizado del dato  $g$ . Según el criterio de Picard (1.17), este problema inverso tiene solución si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_n|^2}{(e^{-n^2 T})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n^2 T} |g_n|^2 < \infty, \quad (1.26)$$

y en tal caso, la solución está dada por

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2 T} g_n \operatorname{sen}(nx). \quad (1.27)$$

De (1.26) y (1.27) se puede observar que este problema es severamente mal condicionado: existe solución sólo para los datos  $g$  tales que sus coeficientes de Fourier  $\{g_n\}$  tienden a cero más rápido que  $e^{-n^2T}$ , es decir para datos muy suaves. Por otra parte, un error en el  $n$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $g$  es amplificado por un factor  $e^{n^2T}$ . Así por ejemplo, si  $T = 1$ , un error del orden de  $10^{-12}$  en el sexto coeficiente de Fourier del dato (lo cual difícilmente podría lograrse en un problema práctico) resultaría en un error del orden de  $10^3$  en el sexto coeficiente de Fourier de la solución, lo cual resultaría inaceptable desde todo punto de vista. Aquí queda claramente de manifiesto el fuerte mal condicionamiento del problema. No es válido pedir más de cuatro coeficientes de Fourier de la solución del problema inverso si se ha de concebir, como sucede siempre en la práctica, la existencia de errores en los datos, aunque estos puedan en principio considerarse despreciables. Como veremos en el Capítulo 8, cualquier intento por resolver numéricamente este problema con métodos tradicionales resultará entonces infructuoso, aún en el hipotético caso en que  $g$  se conozca en forma exacta. Los errores introducidos por la necesidad de discretización y los errores numéricos de redondeo, son suficientes para hacer inestable cualquier método clásico de aproximación.

### 1.3. Teoría espectral y cálculo funcional

Como veremos en el Capítulo 3 la teoría espectral de operadores en espacios de Hilbert y el cálculo funcional proveen un sólido andamiaje matemático para el desarrollo de la teoría de regularización de problemas inversos mal condicionados en un contexto bastante general. En esta sección se presentarán algunos conceptos y resultados básicos cuyas demostraciones pueden encontrarse por ejemplo en [4] y [24]. Para un tratamiento exhaustivo véase el volumen 3 del libro de Dautray y Lions ([10]).

Para la construcción de ciertos métodos de regularización necesitaremos previamente la noción de “función de un operador autoadjunto”. En primer lugar, estudiaremos el caso de operadores lineales autoadjuntos compactos y luego, el de operadores lineales autoadjuntos en general (posiblemente no acotados).

Sea  $\{(\sigma_n; u_n, v_n)\}$  el sistema singular asociado al operador lineal compacto  $K$ . Como  $\{(\sigma_n^2; u_n)\}$  es un autosistema asociado al operador compacto autoadjunto  $K^*K$ , se sigue de (1.11) que

$$K^*Kx = \sum_n \sigma_n^2 \langle x, u_n \rangle u_n, \quad \forall x \in \mathcal{X}. \quad (1.28)$$

A continuación definimos el concepto de “familia espectral”. Denotamos con  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  al espacio de los operadores lineales y continuos de  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{Y}$ .

**Definición 1.8.** Sean  $K \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  compacto y  $\{(\sigma_n; u_n, v_n)\}$  el sistema singular asociado a  $K$ . Para  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $x \in \mathcal{X}$ , definimos

$$E_\lambda x \doteq \begin{cases} \sum_{n: \sigma_n^2 < \lambda} \langle x, u_n \rangle u_n, & \text{si } \lambda \leq 0; \\ \sum_{n: \sigma_n^2 < \lambda} \langle x, u_n \rangle u_n + Px, & \text{si } \lambda > 0, \end{cases} \quad (1.29)$$

donde  $P$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{X}$  sobre  $N(K^*K)$ . El operador  $E_\lambda$  es la proyección ortogonal sobre  $\mathcal{X}_\lambda \doteq \overline{\text{span}\{u_n : n \in \mathbb{N}, \sigma_n^2 < \lambda\}} (+N(K^*K), \text{ si } \lambda > 0)$ . La colección de proyecciones  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  se denomina *familia espectral de  $K^*K$  o resolución de la identidad asociada a  $K^*K$* .

La proyección  $P$  se agrega en (1.29) sólo cuando  $\lambda > 0$  con el objeto de contemplar el caso en que 0 es autovalor de  $K^*K$ . Caso contrario,  $N(K^*K) = \{0\}$  y  $P$  es el operador nulo. Se sigue de esta definición que  $E_\lambda$  “trunca” la expansión en valores singulares de  $x$  ya que sólo se consideran los autovalores de  $K^*K$  menores que  $\lambda$ . Es fácil verificar que la función  $\lambda \rightarrow E_\lambda$  toma valores en  $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ , el espacio de los operadores lineales y continuos de  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{X}$ , y satisface las siguientes propiedades:

- $E_\lambda = 0$  (operador nulo) para  $\lambda \leq 0$ , pues  $\sigma_n^2 > 0$  para todo  $n$ .
- $E_\lambda = I$  (operador identidad) para  $\lambda > \sigma_1^2$ , pues  $\{u_n\}$  expande  $\overline{\text{Ran}(K^*K)}$  y si  $\lambda > \sigma_1^2$ , entonces  $\mathcal{X}_\lambda = \overline{\text{Ran}(K^*K)} + N(K^*K) = \mathcal{X}$ .
- El mapeo  $\lambda \rightarrow E_\lambda$  es monótono no decreciente en el sentido de las formas cuadráticas; es decir, para  $\lambda \leq \mu$  y  $x \in \mathcal{X}$ ,  $\langle E_\lambda x, x \rangle \leq \langle E_\mu x, x \rangle$ .
- $E_\lambda$  es “constante” por tramos y tiene “saltos” en  $\lambda = \sigma_n^2$  (y en  $\lambda = 0$  si y sólo si 0 es un autovalor de  $K^*K$ ) de “altura”

$$S_\lambda(\cdot) \doteq \sum_{n: \sigma_n^2 = \lambda} \langle \cdot, u_n \rangle u_n, \quad (1.30)$$

es decir, el “salto” de  $E_\lambda$  en  $\lambda = \sigma_n^2$  es igual a la proyección ortogonal sobre el autoespacio generado por  $\lambda = \sigma_n^2$ .

Recordemos ahora que la integral de Riemann-Stieltjes con respecto a una función  $F$  constante por tramos resulta en la suma de los valores del integrando evaluado en los puntos de salto de  $F$ , multiplicados por la altura de tales saltos. Por ello, teniendo en cuenta (1.30) se tiene que (1.28) puede verse como la integral de Riemann-Stieltjes de la función identidad “con respecto a  $E_\lambda$ ”. Luego, se puede probar que son válidos casi todos los resultados más importantes de la teoría de integración tales como integración por partes, Teorema de la Convergencia Dominada, etc. (ver [26]). Esto motiva las siguientes notaciones, donde  $x, w \in \mathcal{X}$  y  $f$  es una función continua por tramos que no tiene discontinuidades en los autovalores de  $K^*K$ , es decir, donde  $E_\lambda$  tiene saltos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda x \doteq \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle x, u_n \rangle u_n \quad (1.31)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\langle E_\lambda x, w \rangle \doteq \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle x, u_n \rangle \langle u_n, w \rangle \quad (1.32)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\|E_\lambda x\|^2 \doteq \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) |\langle x, u_n \rangle|^2 \quad (1.33)$$

Es suficiente tomar como extremos inferior y superior de integración 0 y  $\|K\|^2 + \varepsilon$ , respectivamente, para cualquier  $\varepsilon > 0$  (pues  $\sigma_1^2 = \|K^*K\| = \|K\|^2$ ). Por ello, es suficiente con que  $f$  esté definida y sea continua por tramos sólo en  $[0, \|K\|^2 + \varepsilon]$  para algún  $\varepsilon > 0$ . Para enfatizar este hecho utilizaremos a menudo  $\int_0^{\|K\|^2+}$ . Asimismo algunas veces omitiremos los extremos de integración cuando se integre sobre todo  $\mathbb{R}$ .

Observar que para la función identidad,  $f = id$ , la ecuación (1.31) se reduce a

$$\int \lambda dE_\lambda x = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 \langle x, u_n \rangle u_n,$$

y por lo tanto en virtud de (1.11),  $\int \lambda dE_\lambda = K^*K$ . Esto se puede escribir como

$$\int id(\lambda) dE_\lambda = id(K^*K),$$

lo cual motiva la siguiente definición:

**Definición 1.9.** Una función continua por tramos  $f$  de un operador autoadjunto compacto  $K^*K$  se define como

$$f(K^*K) \doteq \int f(\lambda) dE_\lambda \doteq \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle \cdot, u_n \rangle u_n. \quad (1.34)$$

Es importante observar que  $f(K^*K)$  también es un operador lineal, continuo y autoadjunto sobre  $\mathcal{X}$ . En particular, si  $f$  es un polinomio  $p(\lambda) = \sum_{j=0}^n a_j \lambda^j$ , entonces  $p(K^*K) = \sum_{j=0}^n a_j (K^*K)^j$ . Si una sucesión de polinomios  $\{p_n\}$  converge uniformemente a  $f$ , entonces para todo  $x \in \mathcal{X}$ , la sucesión  $\{p_n(K^*K)x\}$  converge a  $f(K^*K)x$ . Luego, se puede probar que para cualquier función continua por tramos  $f$  se tiene la siguiente identidad que utilizaremos en repetidas oportunidades más adelante:

$$f(K^*K)K^* = K^*f(KK^*), \quad (1.35)$$

donde  $f(KK^*)$  se define análogamente a  $f(K^*K)$  usando la familia espectral  $F_\lambda$  asociada a  $KK^*$ , definida para  $\lambda \in \mathbb{R}, y \in \mathcal{Y}$  por

$$F_\lambda y \doteq \begin{cases} \sum_{n: \sigma_n^2 < \lambda} \langle y, v_n \rangle v_n, & \text{si } \lambda \leq 0; \\ \sum_{n: \sigma_n^2 < \lambda} \langle y, v_n \rangle v_n + (I - Q)y, & \text{si } \lambda > 0, \end{cases} \quad (1.36)$$

donde  $(I - Q)$  es la proyección ortogonal sobre  $N(KK^*) = \text{Ran}(KK^*)^\perp$ .

Usando (1.32) y (1.33) es fácil ver que para  $x, w \in \mathcal{X}$  se tiene que

$$\langle f(K^*K)x, w \rangle = \int f(\lambda) d \langle E_\lambda x, w \rangle \quad (1.37)$$

y

$$\|f(K^*K)x\|^2 = \int f^2(\lambda) d \|E_\lambda x\|^2, \quad (1.38)$$

de lo cual se sigue inmediatamente que

$$\|f(K^*K)\| \leq \sup_{\lambda \in [0, \|K\|^2]} |f(\lambda)| \quad (1.39)$$

y

$$\|f(K^*K)K^*\| \leq \sup_{\lambda \in [0, \|K\|^2]} \sqrt{\lambda} |f(\lambda)|. \quad (1.40)$$

Debido a que estos resultados se deducen fácilmente a partir de las respectivas expansiones en valores singulares (1.31)-(1.33), el uso de “integrales con respecto a una familia espectral” para el caso de operadores compactos es simplemente una notación muy conveniente. Sin embargo, sirve además como motivación para introducir el caso más general que trataremos a continuación.

En la Definición 1.8 introdujimos el concepto de “familia espectral asociada al operador  $K^*K$ ”. A continuación definiremos familias espectrales generales en espacios de Hilbert y veremos luego que existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de familias espectrales en un espacio de Hilbert  $\mathcal{X}$  y el conjunto de operadores lineales autoadjuntos sobre  $\mathcal{X}$ .

**Definición 1.10.** Una familia  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  de proyecciones ortogonales en  $\mathcal{X}$  se denomina “familia espectral” o “resolución de la identidad” si satisface las siguientes condiciones:

- i)  $E_\lambda E_\mu = E_{\min\{\lambda, \mu\}}$ , para  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,
- ii)  $E_{-\infty} = 0$ ,  $E_{+\infty} = I$ , donde  $E_{\pm\infty}x \doteq \lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} E_\lambda x$  para todo  $x \in \mathcal{X}$ ,
- iii)  $E_{\lambda^-} = E_\lambda$ , donde  $E_{\lambda^-}x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_{\lambda-\varepsilon}x$  para todo  $x \in \mathcal{X}$ .



Al igual que en (1.31) es posible definir una integral con respecto a una familia espectral arbitraria  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ .

**Proposición 1.11.** Sean  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  una familia espectral sobre  $\mathcal{X}$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y  $x \in \mathcal{X}$ . Entonces es posible definir para todos  $a, b \in \mathbb{R}$  la integral

$$\int_a^b f(\lambda) dE_\lambda x$$

como el límite de la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}})x,$$

donde  $a = \lambda_0 < \dots < \lambda_n = b$ ,  $\xi_i \in (\lambda_{i-1}, \lambda_i]$  cuando  $\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i - \lambda_{i-1}| \rightarrow 0$ .

Las correspondientes integrales impropias, si existen, se definen a partir de estas integrales definidas en la forma usual:

**Definición 1.12.** Sean  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  una familia espectral sobre  $\mathcal{X}$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y  $x \in \mathcal{X}$ , la integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda x$  se define como el límite en  $\mathcal{X}$ , si existe, de  $\int_a^b f(\lambda) dE_\lambda x$  cuando  $a \rightarrow -\infty$  y  $b \rightarrow +\infty$ .

Puesto que la condición *i*) de la Definición 1.10 implica que  $\langle E_\lambda x, x \rangle \leq \langle E_\mu x, x \rangle$  para  $\lambda \leq \mu$  y para todo  $x \in \mathcal{X}$ , se sigue que la función  $\lambda \rightarrow \langle E_\lambda x, x \rangle = \|E_\lambda x\|^2$  (para  $x \in \mathcal{X}$  fijo) es monótona no decreciente. Además, dicha función es continua por izquierda en virtud de la condición *iii*). Luego, esta función define una medida sobre  $\mathbb{R}$  que denotamos con  $d\|E_\lambda x\|^2$  y a la que nos referiremos como “medida generada por la familia espectral  $E_\lambda$  para  $x \in \mathcal{X}$ ”. La siguiente proposición provee una condición necesaria y suficiente para la existencia de la integral  $\int f(\lambda) dE_\lambda x$  en términos de una integral con respecto a la medida  $d\|E_\lambda x\|^2$ .

**Proposición 1.13.** Sean  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  una familia espectral sobre  $\mathcal{X}$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y  $x \in \mathcal{X}$ . Entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda x$$

existe si y sólo si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|E_\lambda x\|^2 < \infty.$$

Ahora veremos la conexión que existe entre familias espectrales y operadores lineales autoadjuntos (no necesariamente compactos) definidos en un espacio de Hilbert. Si  $A$  es un operador lineal autoadjunto en  $\mathcal{X}$ , existe una única familia espectral que se puede utilizar para representar  $A$  y funciones del operador  $A$  como integrales con respecto a dicha familia espectral. Más precisamente, se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 1.14.** *Sea  $A$  un operador lineal autoajunto sobre  $\mathcal{X}$ . Entonces existe una única familia espectral  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  tal que*

$$Dom(A) = \left\{ x \in \mathcal{X} : \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\|E_\lambda x\|^2 < \infty \right\}$$

y

$$Ax = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda x, \quad \forall x \in Dom(A). \quad (1.41)$$

Simbólicamente escribimos

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda.$$

La familia espectral de la proposición anterior se denomina “familia espectral de  $A$ ” y nos referiremos a (1.41) como la “descomposición ó representación espectral de  $A$ ”. Denotemos con  $\mathcal{M}_0$  al conjunto de funciones medibles con respecto a la medida  $d\|E_\lambda x\|^2$  para todo  $x \in \mathcal{X}$ . A continuación definiremos funciones de un operador autoadjunto.

**Definición 1.15.** Sea  $A$  un operador autoadjunto en  $\mathcal{X}$  con familia espectral  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  y  $f \in \mathcal{M}_0$ . Se define el operador  $f(A)$  mediante

$$Dom(f(A)) = \left\{ x \in \mathcal{X} : \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda) d\|E_\lambda x\|^2 < \infty \right\}$$

y para  $x \in Dom(f(A))$ ,

$$f(A)x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda x.$$

Observar que  $\mathcal{M}_0$  contiene, en particular, a todas las funciones continuas por tramos. A continuación presentamos algunas propiedades de las funciones de operadores autoadjuntos.

**Proposición 1.16.** *Sean  $A$  un operador autoadjunto sobre un espacio de Hilbert  $\mathcal{X}$  con familia espectral  $\{E_\lambda\}$  y  $f, g \in \mathcal{M}_0$ .*

*i) Si  $x \in \text{Dom}(f(A))$  y  $z \in \text{Dom}(g(A))$ , entonces*

$$\langle f(A)x, g(A)z \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)g(\lambda) d\langle E_\lambda x, z \rangle.$$

*ii) Si  $x \in \text{Dom}(f(A))$ , entonces  $f(A)x \in \text{Dom}(g(A))$  si y sólo si  $x \in \text{Dom}((gf)(A))$ .*

*Además, en tal caso*

$$g(A)f(A)x = (gf)(A)x.$$

*iii) Si  $\text{Dom}(f(A))$  es denso en  $\mathcal{X}$  entonces  $f(A)$  es también un operador autoadjunto.*

*iv) El operador  $f(A)$  conmuta con  $E_\lambda$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .*

El siguiente resultado muestra una relación entre la familia espectral  $\{E_\lambda\}$  de un operador autoadjunto  $A$  y su espectro  $\sigma(A)$ .

**Proposición 1.17.** *Sea  $A$  un operador autoadjunto sobre un espacio de Hilbert  $\mathcal{X}$  con familia espectral  $\{E_\lambda\}$ . Entonces*

*i)  $\lambda_0 \in \sigma(A)$  si y sólo si  $E_{\lambda_0} \neq E_{\lambda_0+\varepsilon}$  para todo  $\varepsilon > 0$ .*

*ii)  $\lambda_0$  es un autovalor de  $A$  si y sólo si  $E_{\lambda_0} \neq E_{\lambda_0^+} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{\lambda_0+\varepsilon}$ . En tal caso el correspondiente autoespacio está dado por  $(E_{\lambda_0^+} - E_{\lambda_0})(\mathcal{X})$ .*

Observar que *ii)* coincide con lo visto anteriormente para el caso en que  $A$  es compacto además de autoadjunto, en el sentido que el autoespacio correspondiente al autovalor  $\sigma_n^2$  estaba dado por la “altura” del “salto” de  $E_\lambda$  en  $\lambda = \sigma_n^2$ .

En el caso particular en que  $A$  es un operador autoadjunto estrictamente positivo que satisface

$$\langle Ax, x \rangle \geq \gamma \|x\|^2 \text{ para todo } x \in \text{Dom}(A) \text{ y para algún } \gamma > 0,$$

entonces para todo  $f \in \mathcal{M}_0$  se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda x = \int_\gamma^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda x.$$

Luego, es suficiente con que la función  $f$  esté definida sólo en el intervalo  $[\gamma, \infty)$ .

Finalmente, si  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  es un operador lineal acotado y  $A \doteq T^*T$ , entonces para toda  $f \in \mathcal{M}_0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda x = \int_0^{\|T\|^2} f(\lambda) dE_\lambda x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\|T\|^2 + \varepsilon} f(\lambda) dE_\lambda x.$$

Luego, la función  $f$  se puede restringir al intervalo  $[0, \|T\|^2 + \varepsilon]$  para cualquier  $\varepsilon > 0$ . Así, resulta que las identidades (1.35), (1.37) y (1.38) y las desigualdades (1.39) y (1.40) siguen siendo válidas si se sustituye  $K^*K$  por  $T^*T$ . Además, es una consecuencia inmediata de (1.38) y de la desigualdad de Hölder que se satisface la siguiente “*desigualdad de interpolación*”:

$$\|(T^*T)^r x\| \leq \|(T^*T)^q x\|^{\frac{r}{q}} \|x\|^{1-\frac{r}{q}}, \text{ para todo } q > r \geq 0. \quad (1.42)$$

## Capítulo 2

# Operadores de regularización

Regularizar un problema mal condicionado significa, esencialmente, aproximarlos por una sucesión de problemas bien condicionados. En la Sección 2.1 introduciremos el concepto de “regularización” en forma rigurosa y presentaremos algunas de sus propiedades básicas. En la Sección 2.2 definiremos los distintos tipos de error que surgen al regularizar un problema inverso, estudiaremos la noción de “optimalidad” de un método de regularización y analizaremos los posibles órdenes de convergencia que se pueden obtener bajo distintos supuestos de suavidad de la mejor solución aproximada  $x^\dagger$  (ó del dato exacto  $y$ ). En la Sección 2.3 introduciremos los métodos de regularización por proyección. En particular, estudiaremos en detalle el método de mínimos cuadrados y el de mínimos cuadrados dual. Finalmente, en la Sección 2.4 presentaremos el método de la inversa aproximada, propuesto por A. K. Louis y P. Maass en 1990 ([40]).

### 2.1. Definiciones y resultados básicos

Dado el problema planteado en (1.1) nos interesa hallar la mejor solución aproximada (a la que nos referiremos como la “solución exacta”)  $x^\dagger \doteq T^\dagger y$  para un dato específico  $y$ . En aplicaciones concretas, el dato proviene en general de mediciones y por ello no es

posible conocerlo de manera exacta. Lo que se conoce es un “dato aproximado” o “dato con ruido”  $y^\delta$  tal que  $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ , donde  $\delta$  es el nivel de ruido asociado a los errores de medición. En el caso mal condicionado,  $T^\dagger y^\delta$  (si existe) puede no ser una buena aproximación de  $T^\dagger y$  debido a que el operador  $T^\dagger$  no es continuo. Es importante observar además que  $T^\dagger y^\delta$  puede no existir debido a que en este caso  $Dom(T^\dagger)$  es un subespacio propio de  $\mathcal{Y}$ . Por estos motivos, lo que se intenta es hallar una aproximación  $x_\alpha^\delta$  de  $x^\dagger$  que tenga dependencia continua de  $y^\delta$  para que se pueda aproximar de manera estable, y de modo que converja a la solución exacta  $x^\dagger$  cuando el nivel de ruido tienda a cero y el parámetro de regularización  $\alpha$  se elija “adecuadamente”. La construcción de estas aproximaciones  $x_\alpha^\delta$  generalmente involucra al operador  $T$  (excepto cuando  $\|y^\delta\| < \delta$ , es decir, cuando el nivel de ruido es mayor que la magnitud de la señal, en cuyo caso bien puede tomarse  $x_\alpha^\delta \doteq 0$ , independientemente del operador  $T$ ). Por ello tiene más sentido considerar (1.1) como una familia de ecuaciones para cada  $y \in Ran(T)$  (si se supone alcanzabilidad), o para cada  $y \in Dom(T^\dagger)$ , y no sólo como **una** ecuación para **un** dato  $y$  específico. Hablaremos entonces de regularizar dicha familia de ecuaciones o de regularizar el operador solución  $T^\dagger$ .

Una regularización de  $T^\dagger$  consiste, esencialmente, en aproximar el operador no acotado  $T^\dagger$  por una familia paramétrica de operadores continuos  $\{R_\alpha\}$ . Luego, dados  $R_\alpha$  y  $y^\delta$ ,  $x_\alpha^\delta \doteq R_\alpha y^\delta$  es una aproximación de  $x^\dagger$  que se puede calcular de manera estable. Un requerimiento para  $\alpha$ , al que nos referiremos como el “parámetro de regularización”, es que si el nivel de ruido tiende a cero entonces la “solución regularizada”  $x_\alpha^\delta$  debe converger a  $x^\dagger$ . Por lo tanto, tal “regla de elección del parámetro”  $\alpha$  deberá estar vinculada con  $\delta$  y/o  $y^\delta$  o con alguna información específica de la que se disponga acerca del dato exacto  $y$ , como por ejemplo sus propiedades de regularidad. El parámetro  $\alpha$ , o más precisamente la regla de elección del parámetro  $\alpha$ , dependerá entonces de la ecuación específica (1.1).

**Definición 2.1.** Para  $\alpha \in (0, \alpha_0)$  con  $\alpha_0 \in (0, +\infty]$ , sea  $R_\alpha : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  un operador continuo (no necesariamente lineal). Decimos que la familia  $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$  es una *familia de operadores de regularización para  $T^\dagger$* , si para todo  $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ , existe una *regla de elección del parámetro*  $\alpha = \alpha(\delta, y^\delta)$  tal que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{\substack{y^\delta \in \mathcal{Y} \\ \|y^\delta - y\| \leq \delta}} \|R_{\alpha(\delta, y^\delta)} y^\delta - T^\dagger y\| = 0. \quad (2.1)$$

Aquí, la “regla de elección del parámetro”  $\alpha$  es una función  $\alpha : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{Y} \rightarrow (0, \alpha_0)$  tal que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{\substack{y^\delta \in \mathcal{Y} \\ \|y^\delta - y\| \leq \delta}} \alpha(\delta, y^\delta) = 0. \quad (2.2)$$

Para un  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$  específico, si se satisfacen (2.1) y (2.2), entonces el par  $(\{R_\alpha\}, \alpha(\delta, y^\delta))$  se denomina *método de regularización (convergente)* para resolver (1.1).

Así, un método de regularización consiste en una familia de operadores de regularización y una regla de elección del parámetro. Es convergente en el sentido que, si el parámetro de regularización se elige de acuerdo a esa regla, entonces las soluciones regularizadas convergen a  $x^\dagger$  a medida que el nivel de ruido tiende a cero. Observar que esto es así para cualquier colección de datos  $y^\delta$  compatible con el nivel de ruido y por eso constituye un concepto de convergencia en “peor situación”.

Es importante notar que una familia de operadores de regularización  $\{R_\alpha\}$  se define para  $T^\dagger$  (i.e. para nuestro “modelo”), mientras que una regla de elección del parámetro  $\alpha$  se define para un dato  $y$  fijo, es decir para una ecuación específica. Existen dos tipos de reglas de elección del parámetro. Si  $\alpha$  depende sólo de  $\delta$  y no de  $y^\delta$ , es decir,  $\alpha = \alpha(\delta)$ , entonces se la denomina *regla de elección del parámetro a-priori* (puesto que puede definirse “antes” de la obtención del dato  $y^\delta$ ). De otra manera, diremos que  $\alpha$  es una regla de elección del parámetro *a-posteriori*.

Es natural preguntarse si existen reglas de elección del parámetro que dependan sólo de  $y^\delta$  y no del nivel de ruido (es decir, que sean “puramente a-posteriori”). El siguiente

teorema debido a A. B. Bakushinskii ([6]) muestra que tales reglas no pueden ser parte de métodos de regularización convergentes para un problema mal condicionado.

**Teorema 2.2.** Sean  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  espacios de Hilbert y  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un operador lineal y acotado. Supongamos que existen una familia de operadores de regularización  $\{R_\alpha\}$  para  $T^\dagger$  y una regla de elección del parámetro  $\alpha$  que depende de  $y^\delta$  pero no de  $\delta$ , tal que el método  $(\{R_\alpha\}, \alpha(y^\delta))$  es convergente para todo  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$ . Entonces,  $T^\dagger$  es acotado (y en consecuencia el problema (1.1) es bien condicionado).

*Demostración.* Sean  $\{R_\alpha\}$  una familia de operadores de regularización para  $T^\dagger$  y  $\alpha = \alpha(y^\delta)$  una regla de elección del parámetro tal que  $(\{R_\alpha\}, \alpha(y^\delta))$  es convergente para todo  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$ . De (2.1) se sigue entonces que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{\substack{y^\delta \in \mathcal{Y} \\ \|y^\delta - y\| \leq \delta}} \|R_{\alpha(y^\delta)} y^\delta - T^\dagger y\| = 0, \quad (2.3)$$

de lo cual resulta que  $R_{\alpha(y)} y = T^\dagger y$  para todo  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$ . Luego, para cualquier sucesión  $\{y_n\} \subset \text{Dom}(T^\dagger)$  que converja a  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$ , se tiene en virtud de (2.3) que  $T^\dagger y_n = R_{\alpha(y_n)} y_n \rightarrow T^\dagger y$  y por lo tanto,  $T^\dagger$  es continuo (i.e. acotado) sobre  $\text{Dom}(T^\dagger)$ , como queríamos probar. ■

Es importante notar que el resultado anterior no dice que si  $T^\dagger$  no es acotado, las reglas de elección del parámetro que no dependan de  $\delta$ , es decir, “libres de error” no puedan tener un buen comportamiento para niveles de ruido  $\delta$  pequeños. Presentaremos algunas de tales reglas de elección del parámetro heurísticas en el Capítulo 4.

La siguiente proposición permite afirmar que se pueden construir operadores de regularización como aproximaciones puntuales de la inversa generalizada de Moore-Penrose de  $T$ . Dada la importancia de este resultado incluimos la demostración del mismo.



**Proposición 2.3.** Sean  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  y  $R_\alpha$  un operador continuo (posiblemente no lineal) para todo  $\alpha > 0$ . Si  $R_\alpha y \rightarrow T^\dagger y$  para todo  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$  cuando  $\alpha \rightarrow 0^+$ , entonces  $\{R_\alpha\}$  es una familia de operadores de regularización para  $T^\dagger$ . En este caso, para cada  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$  existe una regla de elección del parámetro a-priori  $\alpha(\delta)$  tal que  $(\{R_\alpha\}, \alpha(\delta))$  es un método de regularización convergente para resolver  $Tx = y$ .

*Demostración.* Sea  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$  arbitrario pero fijo. Por hipótesis,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} R_\alpha y = T^\dagger y$ . Entonces dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\gamma > 0$  tal que si  $0 < \alpha \leq \gamma$  se verifica que

$$\|R_\alpha y - T^\dagger y\| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.4)$$

La regla de elección del parámetro  $\alpha$  se construirá como la composición de dos funciones  $\sigma$  y  $\rho^{-1}$ , como veremos a continuación. En primer lugar, veamos que existe una función estrictamente monótona creciente  $\sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  con  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sigma(\varepsilon) = 0$  tal que para cada  $\varepsilon > 0$ ,

$$\|R_{\sigma(\varepsilon)} y - T^\dagger y\| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.5)$$

Definimos para  $\varepsilon > 0$ ,  $\sigma(\varepsilon) \doteq (1 - e^{-\varepsilon}) \theta(\varepsilon)$ , donde

$$\theta(\varepsilon) = \sup \left\{ \alpha \in (0, \alpha_0) : \|R_\alpha y - T^\dagger y\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \quad (2.6)$$

Se deduce de (2.4) que  $\theta(\varepsilon) \neq -\infty$  para todo  $\varepsilon > 0$ . Puesto que sólo interesa el comportamiento de  $\alpha$  en un entorno a la derecha de cero es posible suponer que  $\alpha_0 < +\infty$ , de lo cual resulta que  $\theta(\varepsilon) \leq \alpha_0 < +\infty$  para todo  $\varepsilon > 0$  y en consecuencia  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sigma(\varepsilon) = 0$ . Además, puesto que por definición  $\sigma(\varepsilon) < \theta(\varepsilon)$ , (2.5) se sigue de (2.6). Por último, es fácil verificar que  $\sigma$  es una función estrictamente creciente.

Para  $\varepsilon > 0$  fijo, se tiene por hipótesis que  $R_{\sigma(\varepsilon)}$  es un operador continuo. Luego, dado  $\tilde{\varepsilon} > 0$  existe  $\rho = \rho(\tilde{\varepsilon}) > 0$  tal que si  $\|z - y\| \leq \rho$  entonces

$$\|R_{\sigma(\varepsilon)} z - R_{\sigma(\varepsilon)} y\| \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}. \quad (2.7)$$

Veamos ahora que esto define una función  $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  estrictamente creciente, continua y con  $\lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0^+} \rho(\tilde{\varepsilon}) = 0$ . Para  $\tilde{\varepsilon} > 0$ , definimos  $\mu(\tilde{\varepsilon}) \doteq (1 - e^{-\tilde{\varepsilon}}) \lambda(\tilde{\varepsilon})$ , donde

$$\lambda(\tilde{\varepsilon}) \doteq \sup \left\{ \rho > 0 : \|z - y\| \leq \rho \Rightarrow \|R_{\sigma(\varepsilon)}z - R_{\sigma(\varepsilon)}y\| \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \right\}. \quad (2.8)$$

Se deduce de (2.7) que  $\lambda(\tilde{\varepsilon}) \neq -\infty$ . Se puede suponer sin pérdida de generalidad que  $\lambda(\tilde{\varepsilon}) < +\infty$  para todo  $\tilde{\varepsilon} > 0$ . En efecto, si  $R_{\sigma(\varepsilon)}$  es lineal y  $\lambda(\tilde{\varepsilon}) = +\infty$  para algún  $\tilde{\varepsilon} > 0$ , entonces se puede ver fácilmente que  $R_{\sigma(\varepsilon)}$  es el operador nulo, el cual carece de interés a efectos de regularizar  $T^\dagger$ . Por otra parte, si  $R_{\sigma(\varepsilon)}$  es no lineal, es posible que  $\lambda(\tilde{\varepsilon}) = +\infty$  para algún  $\tilde{\varepsilon} > 0$  (por ejemplo si  $R_{\sigma(\varepsilon)}y = \frac{y}{\|y\|}$  y  $\tilde{\varepsilon} \geq 2$ ). En dicho caso se puede suponer que existe  $\tilde{\varepsilon}_0$  tal que  $\lambda(\tilde{\varepsilon}_0) < +\infty$  (si  $\lambda(\tilde{\varepsilon}) = +\infty$  para todo  $\tilde{\varepsilon} > 0$ , se redefine  $\lambda(\tilde{\varepsilon}) \doteq \tilde{\varepsilon}$ ) y que  $\lambda$  es acotada (si no lo es, se redefine como  $\lambda(\tilde{\varepsilon}) \doteq \lambda(\tilde{\varepsilon}_0)$  para todo  $\tilde{\varepsilon} > \tilde{\varepsilon}_0$ ). Así,  $\lambda$  y  $\mu$  son funciones a valores en  $\mathbb{R}^+$ . Si  $R_{\sigma(\varepsilon)}$  es lineal y  $\lambda$  no es acotada, se puede redefinir, análogamente a lo realizado para el caso no lineal, de tal manera que lo sea. Luego, es posible suponer que  $\lambda$  y en consecuencia  $\mu$  son funciones acotadas. Es fácil probar que  $\mu$  es estrictamente creciente y que  $\lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0^+} \mu(\tilde{\varepsilon}) = 0$ .

Puesto que  $\mu$  es una función monótona y acotada, tiene una cantidad a lo sumo numerable de puntos de discontinuidad. Denotemos con  $s(\tilde{\varepsilon})$  a la “componente discreta de  $\mu$ ”, esto es

$$s(\tilde{\varepsilon}) \doteq \sum_{0 < x \leq \tilde{\varepsilon}} (\mu(x^+) - \mu(x^-)). \quad (2.9)$$

Notar que como  $\mu$  es acotada y los puntos de discontinuidad son numerables la expresión en el lado derecho de (2.9) es o bien una suma finita o bien una serie convergente. Entonces  $\rho(\tilde{\varepsilon}) \doteq \mu(\tilde{\varepsilon}) - s(\tilde{\varepsilon})$  es una función continua, estrictamente creciente con  $\lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0^+} \rho(\tilde{\varepsilon}) = 0$ . Como  $\rho(\tilde{\varepsilon}) \leq \mu(\tilde{\varepsilon})$  y  $\mu(\tilde{\varepsilon}) < \lambda(\tilde{\varepsilon})$ , resulta que  $\rho(\tilde{\varepsilon}) < \lambda(\tilde{\varepsilon})$ , lo cual junto con (2.8) permite afirmar que para todo  $\tilde{\varepsilon} > 0$

$$\|z - y\| \leq \rho(\tilde{\varepsilon}) \Rightarrow \|R_{\sigma(\varepsilon)}z - R_{\sigma(\varepsilon)}y\| \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}. \quad (2.10)$$

A partir de ahora consideramos el caso particular  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$ . Se sigue de las propiedades de  $\rho$  que existe la función inversa  $\rho^{-1} : \text{Ran}(\rho) \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que  $\rho^{-1}(\delta) = \varepsilon$ . Dicha función

es estrictamente creciente, continua y  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \rho^{-1}(\delta) = 0$ . Es posible extender  $\rho^{-1}$  a todo  $\mathbb{R}^+$  y así definir

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \delta &\rightarrow \sigma(\rho^{-1}(\delta)). \end{aligned}$$

Se deduce inmediatamente de las propiedades de  $\sigma$  y  $\rho^{-1}$  que  $\alpha$  es monótona creciente y que  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \alpha(\delta) = 0$ . Además, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$ ,  $\delta \doteq \rho(\varepsilon)$ , tal que si  $\|y^\delta - y\| \leq \delta$ , entonces

$$\|R_{\alpha(\delta)}y^\delta - T^\dagger y\| \leq \|R_{\alpha(\delta)}y^\delta - R_{\alpha(\delta)}y\| + \|R_{\alpha(\delta)}y - T^\dagger y\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

donde la última desigualdad se sigue de (2.5) y (2.7) con  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$  y del hecho que  $\alpha(\delta) = \alpha(\rho(\varepsilon)) = \sigma(\varepsilon)$ . Luego, se satisfacen (2.1) y (2.2) y así, el método  $(\{R_\alpha\}, \alpha(\delta))$  es un método de regularización convergente y la función  $\alpha(\delta)$  define una regla de elección del parámetro *a-priori*, como queríamos probar. ■

**Observación 2.4.** El recíproco de la proposición anterior vale en el siguiente sentido: si  $(\{R_\alpha\}, \alpha(\delta, y))$  es un método de regularización convergente, entonces se deduce de (2.1) que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} R_{\alpha(\delta, y)}y = T^\dagger y \quad (2.11)$$

para todo  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$ . Si  $\alpha$  es continua como función de  $\delta$  en un entorno a la derecha de  $\delta = 0$ , (2.11) implica que  $\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} R_\sigma y = T^\dagger y$ , en caso contrario esto vale únicamente cuando  $\sigma$  tiende a  $0^+$  tomando valores sobre el rango de la regla de elección del parámetro  $\alpha$ .

Así, las regularizaciones son aproximaciones puntuales de la inversa generalizada de Moore-Penrose de  $T$ . Si  $\{R_\alpha\}$  es una familia de operadores lineales uniformemente acotada y si  $\text{Ran}(T)$  no es cerrado, entonces no puede ocurrir que  $R_\alpha$  converja a  $T^\dagger$  en la norma del operador, pues en tal caso  $T^\dagger$  resultaría acotado, lo cual contradice la Proposición 1.2.

Por otra parte, si los  $R_\alpha$  son lineales y  $Ran(T)$  no es cerrado, entonces

$$\|R_\alpha\| \rightarrow +\infty \quad \text{cuando } \alpha \rightarrow 0^+. \quad (2.12)$$

Por el principio de acotación uniforme, esto implica que debe existir  $y \in \mathcal{Y}$  tal que

$$\|R_\alpha y\| \rightarrow +\infty \quad \text{cuando } \alpha \rightarrow 0^+. \quad (2.13)$$

La siguiente proposición permite afirmar que, bajo una condición adicional razonable, el conjunto donde vale (2.13) es precisamente el complemento de  $Dom(T^\dagger)$ .

**Proposición 2.5.** *Sean  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ,  $\{R_\alpha\}$  una familia de operadores de regularización lineales,  $y \in \mathcal{Y}$  y  $x_\alpha \doteq R_\alpha y$ . Entonces*

$$x_\alpha \rightarrow T^\dagger y \quad \text{cuando } \alpha \rightarrow 0^+ \quad \forall y \in Dom(T^\dagger). \quad (2.14)$$

Además si  $\sup_{\alpha>0} \|TR_\alpha\| < \infty$ , entonces

$$\|x_\alpha\| \rightarrow +\infty \quad \text{cuando } \alpha \rightarrow 0^+ \quad \forall y \notin Dom(T^\dagger). \quad (2.15)$$

Los límites en (2.14) y (2.15) deben ser entendidos como se explicó en la Observación 2.4.

*Demostración.* Ver [12], Proposición 3.6. ■

En el siguiente resultado se caracterizan las reglas de elección del parámetro *a-priori* que originan métodos de regularización convergentes.

**Proposición 2.6.** *Sean  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  y  $\{R_\alpha\}$  una familia de operadores de regularización lineales; para  $y \in Dom(T^\dagger)$  sea  $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  una regla de elección del parámetro *a-priori*. Entonces  $(\{R_\alpha\}, \alpha(\delta))$  es un método de regularización convergente si y sólo si*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \alpha(\delta) = 0 \quad (2.16)$$

y

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta \|R_{\alpha(\delta)}\| = 0. \quad (2.17)$$

*Demostración.* Ver [12], Proposición 3.7. ■

Observar que de (2.12) y (2.16) se sigue que  $\|R_{\alpha(\delta)}\| \rightarrow \infty$  cuando  $\delta \rightarrow 0^+$ , pero la condición (2.17) implica que esta convergencia debe ser más lenta que la del nivel de ruido  $\delta$  a cero.

## 2.2. Órdenes de convergencia

Cuando se habla acerca de la tasa de convergencia de un método de regularización  $(\{R_\alpha\}, \alpha)$  se puede pensar en la tasa con la cual tiende a cero el *error de regularización* o *error de aproximación*

$$\|(R_\alpha - T^\dagger)y\| = \|x_\alpha - x^\dagger\| \quad (2.18)$$

cuando  $\alpha \rightarrow 0^+$ , o en la tasa con la cual tiende a cero el *error total* (que surge de comparar la solución regularizada con la solución exacta)

$$\|R_{\alpha(\delta, y^\delta)}y^\delta - T^\dagger y\| = \|x_{\alpha(\delta, y^\delta)}^\delta - x^\dagger\| \quad (2.19)$$

cuando  $\delta \rightarrow 0^+$  (donde  $\|y^\delta - y\| \leq \delta$ ). La tasa de convergencia a cero de (2.18) depende del operador de regularización  $R_\alpha$  y del dato exacto  $y$ , pues el error de regularización es independiente del ruido. Sólo la tasa de convergencia a cero de (2.19) depende de la regla de elección del parámetro. Sin embargo, ambas tasas están relacionadas puesto que

$$\|x_{\alpha(\delta, y^\delta)}^\delta - x^\dagger\| \leq \|x_{\alpha(\delta, y^\delta)} - x^\dagger\| + \|x_{\alpha(\delta, y^\delta)} - x_{\alpha(\delta, y^\delta)}^\delta\|. \quad (2.20)$$

El término  $\|x_{\alpha(\delta, y^\delta)} - x_{\alpha(\delta, y^\delta)}^\delta\| = \|R_{\alpha(\delta, y^\delta)}(y - y^\delta)\|$  es el *error asociado al ruido* y corresponde a la propagación del error en los datos. Notar que este término es cero si  $\delta = 0$ . En el Capítulo 3 estudiaremos cotas para este tipo de error para una clase de métodos de regularización llamados espectrales.

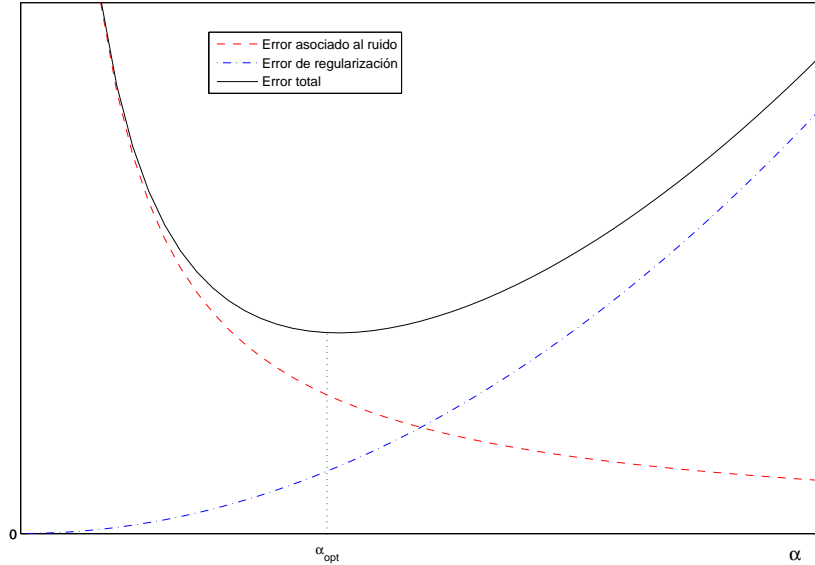


Figura 2.1: Error de regularización, error asociado al ruido y error total vs. parámetro de regularización  $\alpha$  para  $\delta$  fijo.

En la Figura 2.1 se muestra el comportamiento típico de cada uno de los dos tipos de error con respecto al parámetro de regularización  $\alpha$  para un nivel de ruido  $\delta$  fijo. Mientras que el error de regularización tiende a cero cuando  $\alpha \rightarrow 0^+$ , como veremos en el Capítulo 3, el error asociado al ruido crece. El parámetro de regularización debe entonces elegirse apropiadamente, de modo de hallar un equilibrio entre las contribuciones de ambos errores. En el Capítulo 4 estudiaremos distintas reglas de elección del parámetro que nos permitirán alcanzar este equilibrio.

Si  $R_\alpha$  convergiera a  $T^\dagger$  en la norma del operador (ya sabemos que esto no es posible), entonces como  $\|x_\alpha - x^\dagger\| \leq \|R_\alpha - T^\dagger\| \|y\|$ , se podría encontrar una tasa uniforme en  $y$  para la convergencia a cero del error de regularización (2.18). Sin embargo, veremos más adelante que para problemas mal condicionados nunca es posible obtener una tasa de convergencia uniforme. Las tasas de convergencia óptimas para métodos de regularización bajo supuestos sobre la solución (o equivalentemente sobre el dato exacto) están

muy relacionados con el “módulo de continuidad” de  $T^\dagger$  sobre subconjuntos definidos por tales supuestos *a-priori*.

**Definición 2.7.** Para  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$  y  $\delta > 0$ , se define

$$\Omega_T(\delta, \mathcal{M}) \doteq \sup\{\|x\| : x \in \mathcal{M}, \|Tx\| \leq \delta\}. \quad (2.21)$$

En general,  $\Omega_T(\delta, \mathcal{M})$  será infinito; este es el caso por ejemplo si  $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}(T) \neq \{0\}$  y  $\mathcal{M}$  es un subespacio de  $\mathcal{X}$ . Si  $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}(T) = \{0\}$ , entonces  $\Omega_T(\delta, \mathcal{M})$  es finito si y sólo si  $T^\dagger$  es continuo sobre  $T\mathcal{M}$ .

Más adelante veremos que  $\Omega_T(\delta, \mathcal{M})$  está fuertemente relacionado con la tasa de convergencia óptima que puede alcanzar un método de regularización para  $Tx = y$  bajo la hipótesis de que  $x \in \mathcal{M}$ .

**Observación 2.8.** Notar que  $\Omega_T(\delta, \mathcal{M})$  está relacionado con el módulo de continuidad de  $T^\dagger$  sobre  $T\mathcal{M}$ . Recordar que el módulo de continuidad de un operador lineal  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  sobre un conjunto  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$  está definido por

$$\omega_A(\delta, \mathcal{M}) \doteq \sup\{\|Ax\| : x \in \mathcal{M}, \|x\| \leq \delta\}. \quad (2.22)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \omega_{T^\dagger}(\delta, T\mathcal{M}) &= \sup\{\|T^\dagger y\| : y \in T\mathcal{M}, \|y\| \leq \delta\} \\ &= \sup\{\|T^\dagger Tx\| : x \in \mathcal{M}, \|Tx\| \leq \delta\} \\ &= \sup\{\|(I - P)x\| : x \in \mathcal{M}, \|Tx\| \leq \delta\}, \end{aligned}$$

(donde  $P$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{X}$  sobre  $N(T)$ ) de lo que se sigue inmediatamente que  $\omega_{T^\dagger}(\delta, T\mathcal{M}) \leq \Omega_T(\delta, \mathcal{M})$  y se da la igualdad si  $\mathcal{M} \subseteq N(T)^\perp$ , lo cual siempre es cierto si  $T$  es inyectivo.

Una solución regularizada del problema  $Tx = y$  tiene la forma  $x = Ry$ , donde  $R : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  es un operador continuo no necesariamente lineal ( $R$  pertenece a alguna

familia de operadores de regularización  $\{R_\alpha\}$ ). Si en lugar del dato exacto  $y$  se conoce un dato con ruido  $y^\delta$ , entonces el *peor error posible* que se puede cometer usando el operador  $R$  bajo la información que  $\|y - y^\delta\| \leq \delta$  y bajo el supuesto *a-priori* que  $x^\dagger \in \mathcal{M}$ , está dado por

$$\Delta(\delta, \mathcal{M}, R) \doteq \sup_{\substack{x \in \mathcal{M}, y^\delta \in \mathcal{Y} \\ \|Tx - y^\delta\| \leq \delta}} \|Ry^\delta - x\|. \quad (2.23)$$

En el siguiente resultado veremos que la precisión de cualquier regularización no puede ser mejor que  $\Omega_T(\delta, \mathcal{M})$ .

**Proposición 2.9.** *Sean  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ,  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$ ,  $\delta > 0$  y  $R: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  un operador continuo no necesariamente lineal con  $R(0) = 0$ . Entonces*

$$\Delta(\delta, \mathcal{M}, R) \geq \Omega_T(\delta, \mathcal{M}). \quad (2.24)$$

*Demostración.* Sean  $\delta > 0$  y  $x \in \mathcal{M}$  tales que  $\|Tx\| \leq \delta$ . Si  $y^\delta = 0$  entonces se sigue de (2.23) que  $\Delta(\delta, \mathcal{M}, R) \geq \|R(0) - x\| = \|x\|$ , pues por hipótesis  $R(0) = 0$ . Tomando supremo sobre todos los  $x \in \mathcal{X}$  tales que  $\|Tx\| \leq \delta$ , resulta que

$$\Delta(\delta, \mathcal{M}, R) \geq \sup\{\|x\| : x \in \mathcal{M}, \|Tx\| \leq \delta\} = \Omega_T(\delta, \mathcal{M}).$$

■

Además, si  $\text{Ran}(T)$  no es cerrado, no puede existir una tasa de convergencia uniforme para un método de regularización, es decir, la convergencia puede ser arbitrariamente lenta. Más precisamente, se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 2.10.** *Sean  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  con  $\text{Ran}(T)$  no cerrado,  $\{R_\alpha\}$  una familia de operadores de regularización para  $T^\dagger$  con  $R_\alpha(0) = 0 \forall \alpha$  y  $\alpha(\delta, y^\delta)$  una regla de elección del parámetro. Entonces, no existe ninguna función  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  con  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} f(\delta) = 0$  tal que*

$$\|R_{\alpha(\delta, y^\delta)} y^\delta - T^\dagger y\| \leq f(\delta)$$



para todo  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$  con  $\|y\| \leq 1$  y  $\delta > 0$ .

*Demostración.* Ver [12], Proposición 3.11. ■

Así, sólo se pueden obtener tasas uniformes de convergencia sobre subespacios o subconjuntos propios de  $\text{Dom}(T^\dagger)$  o de  $\mathcal{X}$ . Estos subconjuntos se construyen usualmente a partir de supuestos *a-priori* sobre el dato exacto o sobre la solución exacta. Para formular tales supuestos acerca de la solución exacta consideraremos subconjuntos de  $\mathcal{X}$  de la forma

$$\{x \in \mathcal{X} : x = Bw, \|w\| \leq \rho\}, \quad (2.25)$$

donde  $B$  es un operador lineal acotado definido sobre  $\mathcal{X}$  y  $\rho > 0$ . Cuando  $B = (T^*T)^\mu$  para algún  $\mu > 0$  denotamos el conjunto en (2.25) con

$$\mathcal{X}_{\mu, \rho} \doteq \{x \in \mathcal{X} : x = (T^*T)^\mu w, \|w\| \leq \rho\} \quad (2.26)$$

y definimos

$$\mathcal{X}_\mu \doteq \bigcup_{\rho > 0} \mathcal{X}_{\mu, \rho} = \text{Ran}(T^*T)^\mu. \quad (2.27)$$

Estos conjuntos clásicos son denominados “*conjuntos fuente*” y una condición de la forma “ $x \in \mathcal{X}_{\mu, \rho}$ ” se denomina “*condición fuente*” o *representación fuente* y cuantifica el grado de regularidad de la solución con respecto al operador  $T$ . Como para problemas mal condicionados  $T$  es usualmente un operador que “suaviza”, el requisito de que un elemento pertenezca a  $\mathcal{X}_{\mu, \rho}$  puede verse entonces como una condición sobre la “suavidad” ó regularidad de ese elemento. En efecto, si  $x \in \mathcal{X}_{\mu, \rho}$ , entonces existe  $w \in \mathcal{X}$  con  $\|w\| \leq \rho$  tal que  $x = (T^*T)^\mu w$ . Luego, el problema  $Tx = y$  se puede plantear como  $T(T^*T)^\mu w = y$ . Si bien bajo este supuesto ambos problemas son equivalentes, tienen distinto grado de mal condicionamiento pues  $T(T^*T)^\mu$  “suaviza” más que  $T$ . En consecuencia, como problema inverso, el segundo es peor condicionado que el primero. En el Capítulo 6 consideraremos otros operadores  $B$  que originan conjuntos fuente más generales que los del tipo (2.27).

Para operadores compactos, el conjunto  $\mathcal{X}_\mu$  se puede caracterizar en forma precisa usando los valores singulares del operador. En efecto, se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 2.11.** Sean  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  espacios de Hilbert y  $K : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un operador lineal compacto con sistema singular  $\{(\sigma_n; u_n, v_n)\}$ . Entonces para  $\mu > 0$ ,

$$K^\dagger y \in \text{Ran}((K^*K)^\mu) \iff \sum_n \frac{|\langle y, v_n \rangle|^2}{\sigma_n^{2+4\mu}} < \infty. \quad (2.28)$$

*Demostración.* Para  $\mu > 0$  y  $y \in \text{Dom}(K^\dagger)$ , la mejor solución aproximada  $K^\dagger y \in \text{Ran}((K^*K)^\mu)$  si y sólo si existe  $w \in \mathcal{X}$  tal que

$$K^\dagger y = (K^*K)^\mu w = \sum_n \sigma_n^{2\mu} \langle w, u_n \rangle u_n, \quad (2.29)$$

donde la última igualdad se sigue de (1.34). Comparando (2.29) con la expansión en valores singulares de la inversa generalizada de Moore-Penrose de  $K$  (1.18) resulta que

$$\frac{\langle y, v_n \rangle}{\sigma_n} = \sigma_n^{2\mu} \langle w, u_n \rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ahora bien,  $w \in \mathcal{X}$  si y sólo si  $\{\langle w, u_n \rangle\} \in \ell^2$ , es decir,

$$\sum_n \frac{|\langle y, v_n \rangle|^2}{\sigma_n^{2+4\mu}} < \infty,$$

con lo cual queda demostrada la proposición. ■

**Observación 2.12.** Notar que para  $\mu = 0$ , (2.28) se reduce al criterio de Picard (1.17). Es importante observar que la condición (2.28) es más restrictiva cuanto peor condicionado es el problema, es decir, cuanto más rápido tienden a cero los valores singulares  $\sigma_n$ . Esta condición también se hace más restrictiva a medida que aumenta  $\mu$ .

En los dos resultados siguientes veremos que la cota *a-priori* para la precisión de cualquier regularización,  $\Omega_T(\delta, \mathcal{M})$  dada en (2.24), cuando  $\mathcal{M}$  es el conjunto fuente  $\mathcal{X}_\mu$  no puede ser mejor que  $O\left(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}\right)$ , y que este orden de convergencia es óptimo en el sentido que haremos preciso a continuación en la Proposición 2.14.

**Proposición 2.13.** Sean  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  y  $\mu, \rho > 0$ , entonces para cualquier  $\delta > 0$ ,

$$\Omega_T(\delta, \mathcal{X}_{\mu, \rho}) \leq \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}. \quad (2.30)$$

*Demostración.* Sea  $x \in \mathcal{X}_{\mu, \rho}$ , entonces existe  $w \in \mathcal{X}$  con  $\|w\| \leq \rho$  tal que  $x = (T^*T)^\mu w$ . Sea  $\{E_\lambda\}$  la familia espectral asociada al operador autoadjunto  $T^*T$ . Entonces, del hecho que  $x = (T^*T)^\mu w$  y de la desigualdad de interpolación (1.42) (con  $r = \mu$  y  $q = \mu + 1/2$ ) se sigue que

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|(T^*T)^\mu w\| \leq \left\| (T^*T)^{\mu+\frac{1}{2}} w \right\|^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \|w\|^{\frac{1}{2\mu+1}} \\ &= \left\| (T^*T)^{\frac{1}{2}} x \right\|^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \|w\|^{\frac{1}{2\mu+1}} = \|Tx\|^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \|w\|^{\frac{1}{2\mu+1}} \\ &\leq \|Tx\|^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}, \end{aligned}$$

puesto que  $\|w\| \leq \rho$ . Luego, si  $\|Tx\| \leq \delta$ , entonces  $\|x\| \leq \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}$ . Tomando supremo sobre los  $x \in \mathcal{X}_{\mu, \rho}$  tales que  $\|Tx\| \leq \delta$ , se sigue en virtud de (2.21) que  $\Omega_T(\delta, \mathcal{X}_{\mu, \rho}) \leq \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}$ , lo cual concluye la demostración. ■

El resultado anterior nos dice entonces que  $\Omega_T(\delta, \mathcal{X}_{\mu, \rho})$  tiende a cero al menos tan rápido como  $O\left(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}\right)$  cuando  $\delta \rightarrow 0^+$ . De la siguiente proposición se sigue que cuando el operador es compacto con rango no cerrado, esta estimación es óptima al menos asintóticamente, es decir, en (2.30) vale la igualdad a través de una sucesión  $\{\delta_k\}$  que converge a cero.

**Proposición 2.14.** Sean  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  espacios de Hilbert y  $K : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un operador lineal compacto con rango no cerrado. Entonces para cualesquiera  $\mu, \rho > 0$ , existe una sucesión  $\{\delta_k\}$  que converge a cero tal que

$$\Omega_K(\delta_k, \mathcal{X}_{\mu, \rho}) = \delta_k^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}.$$

*Demostración.* Ver [12], Proposición 3.15. ■

**Observación 2.15.** Si el operador  $T$  es acotado no necesariamente compacto y tiene rango no cerrado, el resultado anterior permanece esencialmente válido en el sentido que se puede probar que existe una sucesión  $\{\delta_k\}$  que converge a cero tal que  $\Omega_T(\delta_k, \mathcal{X}_{\mu, \rho}) = O\left(\delta_k^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}\right)$  pero no es  $o\left(\delta_k^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}\right)$ , es decir, no tiende a cero más rápido que  $\delta_k^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}$ .

De las Proposiciones 2.9 y 2.13 y de la Observación 2.15 se deduce que, si  $Ran(T)$  no es cerrado, entonces ningún método de regularización puede ser tal que el error total converja a cero más rápido que  $\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}$  cuando  $\delta \rightarrow 0^+$  bajo el supuesto *a-priori* de que  $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu, \rho}$ , o más rápido que  $O\left(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}\right)$  bajo el supuesto de que  $x^\dagger \in \mathcal{X}_\mu$ . Esto significa que de todas las tasas de la forma  $\delta^s$ , el valor  $s = \frac{2\mu}{2\mu+1}$  produce la mejor posible a la que se puede aspirar bajo estos supuestos *a-priori*. Esta observación induce la noción de optimalidad de un método de regularización sobre los conjuntos fuente  $\mathcal{X}_{\mu, \rho}$ , que definimos a continuación.

**Definición 2.16.** Sean  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  con  $Ran(T)$  no cerrado,  $\{R_\alpha\}$  una familia de operadores de regularización para  $T^\dagger$  y  $\alpha^*$  una regla de elección del parámetro.

i) Se dice que  $(\{R_\alpha\}, \alpha^*)$  es (un método de regularización) *óptimo en  $\mathcal{X}_{\mu, \rho}$*  si

$$\Delta(\delta, \mathcal{X}_{\mu, \rho}, R_{\alpha^*}) = \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}} \quad \text{para todo } \delta > 0.$$

ii) Se dice que  $(\{R_\alpha\}, \alpha^*)$  es (un método de regularización) *de orden óptimo en  $\mathcal{X}_{\mu, \rho}$*  si existe una constante  $c \geq 1$  tal que

$$\Delta(\delta, \mathcal{X}_{\mu, \rho}, R_{\alpha^*}) \leq c \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \rho^{\frac{1}{2\mu+1}} \quad \text{para todo } \delta > 0.$$

Notar que los conjuntos fuente crecen a medida que  $\mu$  tiende a cero y la convergencia óptima se vuelve más lenta.

Comparando el Teorema 1.7 y la Proposición 2.11 se puede ver que, en general,  $\cup_{\mu>0} T(\mathcal{X}_\mu) \neq Ran(T)$ . Sin embargo, en 1990 R. Plato ([52]) probó que, bajo supuestos

muy generales, un método de regularización que es óptimo en un conjunto específico  $\mathcal{X}_\mu$ , es además convergente para todo  $y \in \text{Ran}(T)$ . Todo lo que se requiere es que la regla de elección del parámetro dependa de  $y^\delta$  y de una cota ligeramente mayor que el nivel de ruido  $\delta$ . Más precisamente, sea  $(\{R_\alpha\}, \alpha)$  un método de regularización para  $T^\dagger$ , entonces definiendo para  $\tau > 1$ ,

$$\alpha_\tau(\delta, y^\delta) \doteq \alpha(\tau\delta, y^\delta) \quad (2.31)$$

se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 2.17.** *Sean  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ . Si para todo  $\tau > \tau_0 \geq 1$ , el método de regularización  $(\{R_\alpha\}, \alpha_\tau)$  es de orden óptimo en  $\mathcal{X}_{\mu^*, \rho}$  para algún  $\mu^* > 0$  y para todo  $\rho > 0$ , entonces todos los métodos  $(\{R_\alpha\}, \alpha_\tau)$  son convergentes para  $y \in \text{Ran}(T)$ , y son de orden óptimo para todo  $\mathcal{X}_{\mu, \rho}$  con  $0 < \mu \leq \mu^*$  y  $\rho > 0$ .*

*Demostración.* Ver R. Plato, [52]. ■

En el Capítulo 3 veremos que el supremo de todos los posibles  $\mu$  para los cuales una familia de operadores de regularización es de orden óptimo está relacionado con el concepto de *calificación clásica* del método. Luego, en el Capítulo 4 estudiaremos reglas de elección del parámetro que forman parte de métodos de regularización de orden óptimo en  $\mathcal{X}_{\mu, \rho}$  o en  $\mathcal{X}_\mu$ . Allí veremos también que el resultado del Teorema 2.17 está fuertemente relacionado con un teorema fundamental sobre reglas de elección del parámetro conocido como el *Principio de Discrepancia de Morozov* (ver Teorema 4.3).

## 2.3. Regularización por proyección

Hemos visto que se puede obtener una solución estable de problemas mal condicionados a través de métodos de regularización. Para aproximaciones numéricas de las mismas, se debe procurar un método de fácil implementación computacional, por

ejemplo, uno que pueda realizarse en subespacios de dimensión finita. Una propuesta en esta dirección es la “regularización por proyección”, donde la regularización se obtiene mediante una aproximación en dimensión finita, por ejemplo, a través de discretización o colocación. En esta sección presentaremos dos métodos de proyección: el de mínimos cuadrados y el de mínimos cuadrados dual.

### 2.3.1. El método de mínimos cuadrados

Un procedimiento frecuentemente utilizado para aproximar la solución exacta  $x^\dagger$  es la *proyección de mínimos cuadrados* o *método de mínimos cuadrados*, el cual consiste en hallar la mejor solución aproximada de  $Tx = y$  en un subespacio de dimensión finita de  $\mathcal{X}$ . Más precisamente, dada una sucesión creciente  $\{\mathcal{X}_N\}_{N=1}^\infty$  de subespacios aproximantes de  $\mathcal{X}$  de dimensión finita cuya unión es densa en  $\mathcal{X}$ , construimos la sucesión  $\{x_N\}_{N=1}^\infty$  de soluciones de mínimos cuadrados de mínima norma del problema en cada subespacio  $\mathcal{X}_N$ . Obviamente,  $x_N = T_N^\dagger y$ , donde  $T_N \doteq TP_{\mathcal{X}_N}$  y  $P_{\mathcal{X}_N}$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{X}$  sobre  $\mathcal{X}_N$ . Como  $T_N$  tiene rango cerrado, se sigue de la Proposición 1.2 que  $T_N^\dagger$  es necesariamente acotado y por lo tanto  $x_N$  es una aproximación estable de  $x^\dagger$ . Sin embargo, surgen diversas cuestiones en relación a la convergencia de  $x_N$  a  $x^\dagger$ . En 1985, G. Luecke y K. Hickey ([41]) encontraron una condición necesaria y suficiente para la convergencia fuerte de la sucesión  $\{x_N\}_{N=1}^\infty$  de soluciones de mínimos cuadrados de (1.1) a  $x^\dagger$ .

**Teorema 2.18.** Sean  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un operador lineal y continuo,  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$ ,  $\{\mathcal{X}_N\}$  una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita de  $\mathcal{X}$  tales que  $\overline{\bigcup_{N=1}^\infty \mathcal{X}_N} = \mathcal{X}$  y  $x_N = T_N^\dagger y$ , donde  $T_N = TP_{\mathcal{X}_N}$  y  $P_{\mathcal{X}_N}$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{X}$  sobre  $\mathcal{X}_N$ . Entonces  $x_N \rightarrow x^\dagger$  si y sólo si  $\limsup_{N \rightarrow \infty} \|x_N\| \leq \|x^\dagger\|$ .

*Demostración.* Ver [41], Teorema 11. ■

Es importante observar que la condición del Teorema 2.18 requiere del conocimiento de la magnitud de la solución exacta. Muy a menudo esta información no está disponible. Sin embargo Luecke y Hickey hallaron además una condición suficiente para la convergencia que no requiere de ningún conocimiento *a-priori* sobre (la norma de) la solución exacta. Enunciamos a continuación este resultado.

**Teorema 2.19.** Sean  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un operador lineal y continuo,  $\{\mathcal{X}_N\}$  una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita de  $\mathcal{X}$  tales que  $\overline{\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{X}_N} = \mathcal{X}$  y  $x_N = T_N^\dagger y$ , donde  $T_N = TP_{\mathcal{X}_N}$  y  $P_{\mathcal{X}_N}$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{X}$  sobre  $\mathcal{X}_N$ . Si  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$  entonces  $x_N \rightarrow x^\dagger$  siempre que

$$\sup_N \|(T_N^*)^\dagger x_N\| < \infty \quad (2.32)$$

(o equivalentemente, si  $\sup_N \|(T_N^\dagger)^* x_N\| < \infty$ ).

*Demostración.* Ver [41], Teorema 3. ■

Se sigue del teorema anterior que si  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$ , la condición (2.32) es suficiente para la convergencia de  $x_N$  a  $x^\dagger$ . Sin embargo, no es una condición necesaria (ver [41], Teorema 10).

Si el operador es compacto, esta condición impone un cierto tipo de regularidad sobre  $x^\dagger$ . En efecto,

**Proposición 2.20.** Sean  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un operador lineal y compacto,  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$ ,  $\{\mathcal{X}_N\}$  una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita de  $\mathcal{X}$  tales que  $\overline{\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{X}_N} = \mathcal{X}$  y  $x_N = T_N^\dagger y$ , donde  $T_N = TP_{\mathcal{X}_N}$  y  $P_{\mathcal{X}_N}$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{X}$  sobre  $\mathcal{X}_N$ . Si se satisface (2.32) entonces  $x^\dagger \in \text{Ran}(T^*)$ .

*Demostración.* Ver [12], Proposición 3.22. ■

La condición (2.32) implica además una tasa de convergencia cuando el operador es compacto. Más precisamente, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 2.21.** Sean  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un operador lineal y compacto,  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$ ,  $\{\mathcal{X}_N\}$  una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita de  $\mathcal{X}$  tales que  $\overline{\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{X}_N} = \mathcal{X}$  y  $x_N = T_N^\dagger y$ , donde  $T_N = TP_{\mathcal{X}_N}$  y  $P_{\mathcal{X}_N}$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{X}$  sobre  $\mathcal{X}_N$ . Si se satisface la condición (2.32), entonces

$$\|x_N - x^\dagger\| = O(\|(I - P_{\mathcal{X}_N})T^*\|).$$

*Demostración.* Ver [12], Teorema 3.23. ■

Como corolario del Teorema 2.19, Luecke y Hickey probaron además que la acotación uniforme de la sucesión  $\left\{\|T_N^\dagger\|\right\}_{N=1}^{\infty}$  es también una condición suficiente para la convergencia fuerte de  $x_N$  a  $x^\dagger$ .

Por otra parte, la acotación de la sucesión  $\{\|x_N\|\}_{N=1}^{\infty}$  no es suficiente para garantizar convergencia fuerte (ver [41], Ejemplo 2). Sin embargo, C. W. Groetsch y A. Neubauer ([17]) probaron que si  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$ , entonces esta condición es suficiente y además necesaria para convergencia débil. Como corolario de este resultado, dedujeron en una manera mucho más sencilla la condición necesaria y suficiente para convergencia fuerte establecida previamente por Luecke y Hickey (Teorema 2.18).

Para garantizar convergencia es necesario que los subespacios  $\mathcal{X}_N$  sean cuidadosamente elegidos. Por ejemplo, si  $T$  es compacto y los  $\mathcal{X}_N$  son los autoespacios asociados a las autofunciones, Luecke y Hickey ([41]) probaron que siempre se tiene garantizado que  $x_N \rightarrow x^\dagger$ . Esta convergencia está también garantizada si  $T$  es acotado y los subespacios  $\mathcal{X}_N$  se eligen de modo que “reduzcan” al operador  $T$  (esto es, de modo que  $T(\mathcal{X}_N) \subset \mathcal{X}_N$  y  $T(\mathcal{X}_N^\perp) \subset \mathcal{X}_N^\perp$ ).

Por el contrario, si los subespacios  $\mathcal{X}_N$  son elegidos arbitrariamente sin imponer condiciones adicionales, por ejemplo cuando los  $\mathcal{X}_N$  están pobre o inadecuadamente asociados con el operador  $T$ , entonces casi cualquier cosa puede suceder. Por ejemplo en 1980, T. Seidman ([54]) probó que si el problema (1.1) es mal condicionado, entonces



sin ningún supuesto sobre  $x^\dagger$  no se puede garantizar que  $x_N \rightarrow x^\dagger$  y que es posible que  $\|x_N - x^\dagger\|$  se incremente sin cota. El siguiente resultado se sigue inmediatamente a partir del Ejemplo 3.1 en [54]:

**Teorema 2.22.** *Sean  $\mathcal{X}$  un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita,  $B \doteq \{e_n\}_{n=1}^\infty$  una base ortonormal de  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{X}_N \doteq \text{span}\{e_1, \dots, e_N\}$ . Entonces existen un operador lineal  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  compacto, inyectivo, autoadjunto y de rango denso en  $\mathcal{X}$  y  $b \in \text{Ran}(A)$ , con  $b = Ax^*$  para algún  $x^* \in \mathcal{X}$ , tal que si  $x_N$  es la solución de mínimos cuadrados de  $Ax = b$  en  $\mathcal{X}_N$ , entonces  $\|x_N - x^*\| \rightarrow \infty$ .*

**Observación 2.23.** El operador  $A_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  del Ejemplo 3.1 en [54] no es necesariamente autoadjunto. Si consideramos el sistema singular  $\{(\sigma_n; u_n, v_n)\}$  asociado al operador compacto  $A_0$  y el operador lineal unitario  $U : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  tal que  $Uu_n = v_n$ , entonces el operador lineal  $A \doteq U^{-1}A_0$  además de ser compacto, inyectivo y de rango denso, es autoadjunto y  $\|A_0x - z\| = \|Ax - U^{-1}z\|$  para todo  $z \in \mathcal{X}$ .

**Corolario 2.24.** *Sean  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  espacios de Hilbert de dimensión infinita,  $\mathcal{X}$  separable,  $B \doteq \{e_n\}_{n=1}^\infty$  una base ortonormal de  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{X}_N \doteq \text{span}\{e_1, \dots, e_N\}$ . Entonces existen un operador lineal  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  compacto, inyectivo y de rango denso en  $\mathcal{Y}$  y un elemento  $b \in \text{Ran}(A)$ ,  $b = Ax^*$  para algún  $x^* \in \mathcal{X}$ , tales que si  $x_N$  es la solución de mínimos cuadrados de  $Ax = b$  en  $\mathcal{X}_N$ , entonces  $\|x_N - x^*\| \rightarrow \infty$ .*

*Demostración.* Por el Teorema 2.22 existen  $A_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  y  $b_0 \in \text{Ran}(A_0)$ ,  $b_0 = A_0x^*$  para algún  $x^* \in \mathcal{X}$ , tales que  $\|x_N^0 - x^*\| \rightarrow \infty$ , donde  $x_N^0$  es la solución de mínimos cuadrados de  $A_0x = b_0$  en  $\mathcal{X}_N$ . Sea  $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un operador unitario arbitrario y definimos  $A \doteq VA_0$  y  $b \doteq Vb_0$ . Entonces, se sigue inmediatamente que el operador  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  resulta lineal, compacto, inyectivo, de rango denso en  $\mathcal{Y}$  y  $b \in \text{Ran}(A)$ . Sea  $x_N$  la solución de mínimos cuadrados de  $Ax = b$  en  $\mathcal{X}_N$ . Como  $\|Ax - b\|_{\mathcal{Y}} = \|A_0x - b_0\|_{\mathcal{X}}$ , resulta que  $x_N^0$  es también solución de mínimos cuadrados de  $Ax = b$  en  $\mathcal{X}_N$ , es decir  $x_N^0 = x_N$ , de lo cual se deduce que  $\|x_N - x^*\| \rightarrow \infty$ . ■

En el Capítulo 5 probaremos algunos resultados que son más generales que los del Teorema 2.22 y Corolario 2.24 y que forman parte de los aportes originales de esta tesis (ver también [57]).

### 2.3.2. El método de mínimos cuadrados dual

En la sección anterior estudiamos un método de regularización por proyección sobre el espacio  $\mathcal{X}$ . Es también posible regularizar proyectando sobre el espacio  $\mathcal{Y}$ . Ésto origina un método de proyección diferente, conocido como *método de mínimos cuadrados dual*, para el cual, como veremos, la convergencia siempre está garantizada.

Dada una sucesión creciente  $\{\mathcal{Y}_N\}_{N=1}^{\infty}$  de subespacios de dimensión finita de  $\overline{\text{Ran}(T)} = N(T^*)^{\perp} \subset \mathcal{Y}$ , cuya unión es densa en  $N(T^*)^{\perp}$ , definimos ahora  $x_N$  como la solución de mínimos cuadrados de mínima norma de la ecuación que resulta de proyectar el problema  $Tx = y$  sobre el subespacio  $\mathcal{Y}_N$ , es decir:

$$T_N x = y_N, \quad (2.33)$$

donde  $T_N \doteq Q_N T$ ,  $y_N \doteq Q_N y$  y  $Q_N$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{Y}$  sobre  $\mathcal{Y}_N$ . Entonces  $x_N = T_N^{\dagger} y_N$  y como  $\text{Ran}(T_N) \subset \text{Ran}(Q_N) = \mathcal{Y}_N$ , se deduce que  $\text{Ran}(T_N)$  es cerrado por ser de dimensión finita. Por lo tanto,  $T_N^{\dagger}$  es acotado y nuevamente,  $x_N$  es una aproximación estable de  $x^{\dagger}$ . Observar que  $Q_N$  converge fuertemente a  $Q$  cuando  $N \rightarrow \infty$ , donde  $Q$  es la proyección ortogonal sobre  $\overline{\text{Ran}(T)}$ .

En el siguiente resultado se da una caracterización especial de  $x_N$  en este caso.

**Teorema 2.25.** Sean  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un operador lineal y acotado,  $\{\mathcal{Y}_N\}$  una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita de  $N(T^*)^{\perp}$  tales que  $\overline{\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{Y}_N} = N(T^*)^{\perp}$ ,  $y \in \text{Dom}(T^{\dagger})$ ,  $x_N = T_N^{\dagger} y_N$ , donde  $T_N \doteq Q_N T$ ,  $y_N \doteq Q_N y$  y  $Q_N$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{Y}$  sobre  $\mathcal{Y}_N$ . Entonces  $x_N = P_{\mathcal{X}_N} x^{\dagger}$ , donde  $P_{\mathcal{X}_N}$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{X}$  sobre  $\mathcal{X}_N \doteq T^* \mathcal{Y}_N$ . Además,  $x_N \rightarrow x^{\dagger}$  cuando

$N \rightarrow \infty$ .

*Demostración.* Ver [12], Teorema 3.24. ■

Puesto que  $T_N^\dagger Q_N$  es continuo para todo  $N \in \mathbb{N}$  y  $T_N^\dagger Q_N \rightarrow T^\dagger$  puntualmente sobre  $\text{Dom}(T^\dagger)$  cuando  $N \rightarrow \infty$ , se sigue de la Proposición 2.3 que  $\{T_N^\dagger Q_N\}$  es una familia de operadores de regularización para  $T^\dagger$ .

En el siguiente ejemplo mostramos que la *colocación de mínimos cuadrados* o *discretización de momentos* ([47]), que surge al discretizar una ecuación integral de Fredholm de primera clase, puede verse como un proceso de regularización por mínimos cuadrados dual.

**Ejemplo 2.26.** Sea  $K : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$  un operador integral con núcleo continuo  $k$  como se definió en (1.24). Para aproximar numéricamente la mejor solución aproximada de  $Kx = y$  usando el método de colocación de mínimos cuadrados, se eligen  $N$  “puntos de colocación”  $s_j \in [0, 1]$ ,  $j = 1, \dots, N$  y se aproxima  $x^\dagger$  por la solución  $x(t)$  de mínima norma en  $L^2[0, 1]$  que satisface la ecuación integral en esos puntos de colocación, es decir, de modo que

$$\int_0^1 k(s_j, t)x(t)dt = y(s_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.34)$$

En este caso, se puede probar que  $\mathcal{Y} \doteq \text{Ran}(K)$  con el producto interno definido por

$$\langle y, z \rangle_{\mathcal{Y}} \doteq \langle K^\dagger y, K^\dagger z \rangle_{L^2}, \quad y, z \in \text{Ran}(K),$$

es un espacio de Hilbert. Luego, la ecuación (2.34) es equivalente a

$$\langle Kx, M_{s_j} \rangle_{\mathcal{Y}} = \langle y, M_{s_j} \rangle_{\mathcal{Y}}, \quad \forall j = 1, \dots, N, \quad (2.35)$$

donde  $M_{s_j} \doteq M(s_j, \cdot)$  con  $M(s, t) \doteq \int_0^1 k(s, u)k(t, u)du$ . Es claro ahora que (2.35) es equivalente a (2.33) con  $\mathcal{Y}_N \doteq \text{span}\{M_{s_1}, \dots, M_{s_N}\}$ , y por lo tanto el método de colocación de mínimos cuadrados es efectivamente un caso particular de regularización

por proyección de mínimos cuadrados dual. Luego en virtud del Teorema 2.25, aplicado a  $K$  como operador de  $L^2[0, 1]$  en  $\mathcal{Y}$ , resulta entonces que la solución de mínima norma de (2.34) está dada por  $P_{\mathcal{X}_N}x^\dagger$ , donde  $P_{\mathcal{X}_N}$  es la proyección ortogonal de  $L^2[0, 1]$  sobre  $\mathcal{X}_N \doteq K^*\mathcal{Y}_N = \text{span}\{k_{s_1}, \dots, k_{s_N}\}$  con  $k_{s_j} \doteq k(s_j, \cdot)$ . Suponiendo que las funciones  $k_{s_1}, \dots, k_{s_N}$  son linealmente independientes en  $L^2[0, 1]$ , se tiene que

$$x_N = P_{\mathcal{X}_N}x^\dagger = \sum_{i=1}^N \xi_i k_{s_i},$$

donde  $\xi_i$  para  $i = 1, \dots, N$ , son las soluciones del sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{i=1}^N M(s_i, s_j) \xi_i = y(s_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

Si la sucesión de puntos de colocación  $\{s_N\}$  es densa en  $[0, 1]$ , entonces se puede ver que  $P_{\mathcal{X}_N}$  converge puntualmente al operador identidad  $I$ , y por lo tanto, en virtud del Teorema 2.25,  $x_N \rightarrow x^\dagger$  cuando  $N \rightarrow \infty$ .

Si bien los métodos de proyección son métodos de regularización, en ellos no interviene explícitamente ningún parámetro de regularización. Sin embargo, como veremos a continuación, para el caso de mínimos cuadrados dual hay un parámetro de regularización oculto que es el menor valor singular de  $T_N$  (notar que  $T_N$  es compacto y tiene un número finito de valores singulares pues su rango tiene dimensión finita).

Supongamos que sólo se conoce un dato con ruido  $y^\delta$  tal que

$$\|Q_N(y - y^\delta)\| \leq \delta, \quad (2.36)$$

y denotemos con  $x_N^\delta$  a las soluciones de mínimos cuadrados de (2.33) con  $y^\delta$  en lugar de  $y$ , es decir,  $x_N^\delta \doteq T_N^\dagger Q_N y^\delta$ .

**Teorema 2.27.** Sean  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un operador lineal y acotado,  $\{Y_N\}$  una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita de  $N(T^*)^\perp$  tales que  $\overline{\bigcup_{N=1}^\infty Y_N} = N(T^*)^\perp$ ,  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$ ,  $x_N = T_N^\dagger y_N$ , donde  $T_N \doteq Q_N T$ ,  $y_N \doteq$

$Q_{NY}$  y  $Q_N$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{Y}$  sobre  $\mathcal{Y}_N$ . Sea  $\mu_N$  el menor valor singular de  $T_N$ . Supongamos que se satisface (2.36). Si  $\frac{\delta}{\mu_N} \rightarrow 0$  cuando  $\delta \rightarrow 0^+$  y  $N \rightarrow \infty$ , entonces  $x_N^\delta \rightarrow x^\dagger$  cuando  $\delta \rightarrow 0^+$  y  $N \rightarrow \infty$ .

*Demostración.* Ver [12], Teorema 3.26. ■

**Observación 2.28.** El teorema anterior es el análogo de la Proposición 2.6. Aquí,  $\frac{1}{\mu_N}$  tiene el rol de  $\alpha(\delta)$  en virtud de que  $\|T_N^\dagger\| = \frac{1}{\mu_N}$  para todo  $N \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto,  $(\{T_N^\dagger Q_N\}, \frac{1}{\mu_N})$  es un método de regularización convergente para  $T^\dagger$ .

Es fácil probar que

$$\|x_N^\delta - x^\dagger\| \leq \|x_N - x^\dagger\| + \frac{\delta}{\mu_N}. \quad (2.37)$$

Aquí  $\|x_N - x^\dagger\|$  es el *error de discretización* (análogo al error de regularización definido en la Sección 2.2) y  $\frac{\delta}{\mu_N}$  es una cota para el error  $\|x_N^\delta - x_N\|$  asociado a la propagación de ruido en los datos, es decir,  $\|x_N^\delta - x_N\| \leq \frac{\delta}{\mu_N}$ .

Para una dimensión fija  $N$ , es natural preguntarnos entonces cómo elegir  $\mathcal{Y}_N$  de tal manera que se maximice  $\mu_N$ , y así disminuya el error asociado con el ruido. El siguiente resultado permite responder a esta pregunta para el caso de operadores compactos.

**Proposición 2.29.** Sean  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un operador lineal y compacto con sistema singular  $\{(\sigma_n; u_n, v_n)\}$ ,  $\mathcal{Y}_N$  un subespacio de  $N(T^*)^\perp$  tal que  $\dim(\mathcal{Y}_N) = N$ ,  $T_N \doteq Q_N T$ , donde  $Q_N$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{Y}$  sobre  $\mathcal{Y}_N$  y sea  $\mu_N$  el menor valor singular de  $T_N$ . Entonces  $\mu_N \leq \sigma_N$ .

*Demostración.* Ver [12], Proposición 3.28. ■

Eligiendo  $\mathcal{Y}_N = \mathcal{V}_N \doteq \text{span}\{v_1, \dots, v_N\}$ , se tiene que  $\mu_N = \sigma_N$  y por lo tanto, en virtud de (2.37) y de la Proposición 2.29, concluimos que esta elección de  $\mathcal{Y}_N$  resulta en un método para el cual el error asociado al ruido es óptimo. En este caso el método resultante es conocido como *descomposición en valores singulares truncada*, que estudiaremos en detalle en el Capítulo 3.

Es oportuno observar aquí que en el caso particular que  $\mathcal{Y}_N = \mathcal{V}_N \doteq \text{span}\{v_1, \dots, v_N\}$ , el operador  $T_N$  asociado al método de proyección por mínimos cuadrados dual coincide con el operador  $T_N$  asociado al método de mínimos cuadrados cuando  $\mathcal{X}_N \doteq T^*\mathcal{Y}_N = \text{span}\{u_1, \dots, u_N\}$ , puesto que  $Q_N T = T P_{\mathcal{X}_N}$ , donde  $Q_N$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{Y}$  sobre  $\mathcal{Y}_N$  y  $P_{\mathcal{X}_N}$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{X}$  sobre  $\mathcal{X}_N$ . Luego, si  $T$  es compacto y se satisface la condición (2.32), se sigue inmediatamente de (2.37) y del Teorema 2.21 que

$$\|x_N^\delta - x^\dagger\| = O\left(\|(I - P_{\mathcal{X}_N})T^*\| + \frac{\delta}{\mu_N}\right). \quad (2.38)$$

De la siguiente proposición se sigue que la elección de  $\mathcal{Y}_N = \mathcal{V}_N$  también es óptima con respecto al error de discretización  $\|x_N - x^\dagger\|$ .

**Proposición 2.30.** *Sean  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un operador lineal y compacto con sistema singular  $\{(\sigma_n; u_n, v_n)\}$ ,  $\mathcal{Y}_N$  un subespacio de  $N(T^*)^\perp$  tal que  $\dim(\mathcal{Y}_N) = N$  y  $P_N$  la proyección ortogonal de  $\mathcal{X}$  sobre  $\mathcal{X}_N \doteq T^*\mathcal{Y}_N$ . Entonces*

$$\|(I - P_{\mathcal{X}_N})T^*\| \geq \sigma_{N+1}.$$

*Si  $\mathcal{Y}_N = \mathcal{V}_N$ , entonces vale la igualdad.*

*Demostración.* Ver [12], Proposición 3.29. ■

De (2.38) y de la Proposición 2.30 se sigue que si  $T$  es compacto,  $O\left(\sigma_{N+1} + \frac{\delta}{\sigma_N}\right)$  es el mejor orden de convergencia que puede obtenerse para el error total utilizando un método de proyección por mínimos cuadrados dual para el cual se satisfaga (2.32). Este orden de convergencia es alcanzado por el método de descomposición en valores singulares truncada.

## 2.4. El método de la inversa aproximada

Sean  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un operador lineal, continuo de rango no cerrado (de modo que  $A^\dagger$  no es acotado) y consideremos el problema

$$Af = g \tag{2.39}$$

donde  $g$  es un dato que supondremos conocido. Se utilizaron las letras  $f$  y  $g$  porque aquí supondremos que  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  son espacios de funciones definidas sobre algún conjunto abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ .

En 1990, A. K. Louis y P. Maass ([40]) propusieron un método de regularización que permite obtener una *versión molificada* del problema (2.39). El operador solución, llamado “*inversa aproximada*”, transforma el dato en una aproximación estable de la solución. Una de las ventajas más importantes de este método es que el operador solución no depende del dato y por lo tanto puede ser precalculado, antes de la obtención de este. El método está basado en la idea de que el cálculo de momentos de la solución es estable. Más precisamente, sea  $m_\gamma : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una familia paramétrica de funciones a las que llamaremos “molificadores” (“mollifiers”). Aquí  $\gamma$  es el parámetro de regularización. Para cada  $s \in \Omega$  en lugar de  $f(s)$  se calcula la aproximación  $\langle f, m_\gamma(s, \cdot) \rangle_{\mathcal{X}}$ . Este proceso de molificación reduce la influencia de las componentes de alta frecuencia en la solución, las cuales, como vimos anteriormente, son las causantes de la inestabilidad.

Resulta claro sin embargo que  $\langle f, m_\gamma(s, \cdot) \rangle_{\mathcal{X}}$  no se puede calcular explícitamente debido a que  $f$  es desconocida. Para que este cálculo sea posible, para cada  $s \in \Omega$  aproximamos  $m_\gamma(s, \cdot)$  por un elemento en el rango del operador adjunto  $A^*$ , es decir, determinamos  $\psi_\gamma^s \in \mathcal{Y}$  tal que  $m_\gamma(s, \cdot) \simeq A^* \psi_\gamma^s$ . En particular, observar que si la ecuación

$$m_\gamma(s, \cdot) = A^* \psi_\gamma^s \tag{2.40}$$

tiene una solución  $\psi_\gamma^s$ , entonces

$$f(s) \approx \langle f, m_\gamma(s, \cdot) \rangle_{\mathcal{X}} = \langle f, A^* \psi_\gamma^s \rangle_{\mathcal{X}} = \langle Af, \psi_\gamma^s \rangle_{\mathcal{Y}} = \langle g, \psi_\gamma^s \rangle_{\mathcal{Y}}. \quad (2.41)$$

Si (2.40) no tiene solución, determinamos  $\psi_\gamma^s$  minimizando  $\|A^* \psi_\gamma^s - m_\gamma(s, \cdot)\|$ . Como ya sabemos (ver Teorema 1.4) esto es equivalente a resolver la ecuación normal

$$AA^* \psi_\gamma^s = Am_\gamma(s, \cdot). \quad (2.42)$$

En cualquier caso es necesario seleccionar el molificador adecuadamente de modo que esta ecuación tenga solución (i.e.  $m_\gamma(s, \cdot) \in \text{Dom}((A^*)^\dagger)$ ). Se puede lograr unicidad, por ejemplo, seleccionando la solución de mínima norma. Luego de obtener  $\psi_\gamma^s$ , aproximamos  $\langle f, m_\gamma(s, \cdot) \rangle_{\mathcal{X}}$  por

$$\langle f, m_\gamma(s, \cdot) \rangle_{\mathcal{X}} \simeq \langle f, A^* \psi_\gamma^s \rangle_{\mathcal{X}} = \langle Af, \psi_\gamma^s \rangle_{\mathcal{Y}} = \langle g, \psi_\gamma^s \rangle_{\mathcal{Y}}.$$

Los conceptos de inversa aproximada y núcleo de reconstrucción se definen como sigue (ver también [38]).

**Definición 2.31.** Sean  $m_\gamma$  un molificador dado y  $\psi_\gamma^s$  solución de (2.42). El operador  $S_\gamma : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  definido por

$$(S_\gamma g)(s) \doteq \langle g, \psi_\gamma^s \rangle_{\mathcal{Y}},$$

se denomina **inversa aproximada** del operador  $A$  asociada al molificador  $m_\gamma$  y  $\psi_\gamma^s$  se llama **núcleo de reconstrucción** en el punto  $s$ .

La utilización del método de la inversa aproximada presenta varias ventajas con respecto a los métodos de regularización tradicionales. En primer lugar, si bien la ecuación (2.40) es también mal condicionada (con el mismo grado de mal condicionamiento que el problema original), en este caso el dato es el molificador  $m_\gamma$ , el cual se elige en forma arbitraria y por lo tanto se conoce exactamente. En segundo lugar, la determinación del



núcleo de reconstrucción es independiente de  $g$  y por lo tanto puede ser calculado “*a-priori*”, antes de la obtención de los datos. Finalmente el proceso de inversión consiste en resolver un producto escalar y, en caso de grandes dimensiones, este es especialmente apto para su cálculo numérico por procesamiento en paralelo.

Entre los molificadores más usuales mencionamos:

$$m_\gamma(x, y) = \frac{d}{\text{vol}(S^{d-1})\gamma^d} \chi_\gamma(x - y), \quad (2.43)$$

donde  $\chi_\gamma$  es la función característica de la bola con centro en el origen y radio  $\gamma$  y  $\text{vol}(S^{d-1})$  es la medida de la superficie de la bola unitaria en  $\mathbb{R}^d$ . La utilización de este molificador resulta en el cálculo de promedios locales de la solución.

El molificador

$$m_\gamma(x, y) = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^d \text{sinc}(\gamma(x - y)),$$

actúa como un filtro “pasa-bajas”, eliminando las altas frecuencias de la solución. También suelen utilizarse molificadores de decaimiento rápido de tipo Gaussiano:

$$m_\gamma(x, y) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \gamma^{-d} \exp\left(\frac{-|x - y|^2}{2\gamma^2}\right). \quad (2.44)$$

Finalmente mencionamos los molificadores lineales por tramos:

$$m_\gamma(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} - \frac{y-x}{\gamma^2}, & x \leq y \leq x + \gamma, \\ \frac{1}{\gamma} + \frac{y-x}{\gamma^2}, & x - \gamma \leq y \leq x, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.45)$$

En el caso en que  $T$  es compacto, veremos en la Sección 3.2.4 que el método de la inversa aproximada generaliza, en un sentido que haremos preciso en esa sección, a los llamados “métodos de filtro”.

Finalmente es importante señalar que el método de la inversa aproximada resulta especialmente adecuado en los casos en que no es posible acceder de manera sencilla al sistema singular asociado al operador pero el operador adjunto es relativamente

simple. Este es exactamente el caso, por ejemplo, en el problema de la ecuación lateral del calor (la “sideways heat equation”). En el Capítulo 8 presentamos varios resultados numéricos utilizando la inversa aproximada en este problema particular.

# Capítulo 3

## Métodos de regularización espectrales

En este capítulo presentaremos una clase muy amplia de operadores de regularización lineales que se construyen utilizando el concepto de función de un operador lineal autoadjunto, desarrollado anteriormente en el marco de teoría espectral. En la Sección 3.1 definiremos los métodos de regularización espectrales y estudiaremos sus propiedades más importantes. En particular, presentaremos órdenes de convergencia y cotas para los distintos tipos de errores e introduciremos los conceptos clásicos de calificación y saturación de métodos de regularización espectrales. Estudiaremos además algunos resultados recíprocos importantes que permiten deducir propiedades de regularidad de la solución exacta de un problema inverso, a partir del orden de convergencia del error de regularización o del error total. En la Sección 3.2 presentaremos algunos casos particulares de métodos de regularización espectrales con el objetivo de ilustrar algunos de los conceptos teóricos desarrollados en la Sección 3.1.

### 3.1. Definiciones y propiedades

Construiremos una clase de operadores de regularización lineales utilizando el concepto de función de un operador autoadjunto que hemos presentado en la Sección 1.3.

Para ello, dados  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  espacios de Hilbert y  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , trataremos primero de expresar  $T^\dagger$ , la inversa generalizada de Moore-Penrose de  $T$ , en términos de una integral con respecto a la familia espectral  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  asociada al operador autoadjunto  $T^*T$  (ver Proposición 1.14). Como en la Sección 1.3, denotaremos con  $\mathcal{M}_0$  al conjunto de funciones medibles con respecto a la medida  $d\|E_\lambda x\|^2$  para todo  $x \in \mathcal{X}$ .

Supongamos en primer lugar, que el operador  $T^*T$  tiene inversa continua. Entonces  $(T^*T)^{-1}$  es un operador acotado y autoadjunto, de lo cual se sigue (ver [5]) que

$$\sup_{\lambda \in \sigma((T^*T)^{-1})} \lambda = \|(T^*T)^{-1}\|. \quad (3.1)$$

Como  $T^*T$  y  $(T^*T)^{-1}$  pertenecen ambos a  $\mathcal{L}(\mathcal{X})$  se tiene que

$$\sigma(T^*T) = \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma((T^*T)^{-1}) \right\},$$

lo cual junto a (3.1) permite deducir que

$$\inf_{\lambda \in \sigma(T^*T)} \lambda = \frac{1}{\|(T^*T)^{-1}\|}.$$

Entonces,  $\sigma(T^*T) \subset \left[ \|(T^*T)^{-1}\|^{-1}, \|T\|^2 \right]$  y puesto que  $f(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$  es continua en ese intervalo, resulta que  $f \in \mathcal{M}_0$ . Luego, se sigue de la Definición 1.15 que  $(T^*T)^{-1} = \int \frac{1}{\lambda} dE_\lambda$ . Así, la ecuación (1.9) (con  $(T^*T)^\dagger = (T^*T)^{-1}$ ) implica que  $T^\dagger$  es acotado y en consecuencia,  $Ran(T)$  es cerrado y  $Dom(T^\dagger) = \mathcal{Y}$ . Por lo tanto, para todo  $y \in \mathcal{Y}$  se tiene que  $x^\dagger$  satisface la ecuación normal (1.8) y  $x^\dagger$  puede escribirse entonces como

$$x^\dagger \doteq T^\dagger y = (T^*T)^{-1} T^* y = \int \frac{1}{\lambda} dE_\lambda T^* y. \quad (3.2)$$

Consideremos ahora un operador  $K : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  lineal, compacto con sistema singular  $\{(\sigma_n; u_n, v_n)\}$  y  $Ran(K)$  no cerrado. Para  $y \in Dom(K^\dagger)$  se puede obtener una expresión para  $K^\dagger y$  análoga a (3.2), donde  $\{E_\lambda\}$  es ahora la familia espectral asociada al operador autoadjunto  $K^*K$ . En efecto, se sigue de (1.18), (1.12) y (1.34) que para  $y \in Dom(K^\dagger)$ ,

$$K^\dagger y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y, v_n \rangle}{\sigma_n} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n^2} \langle y, \sigma_n v_n \rangle u_n$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n^2} \langle y, Ku_n \rangle u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n^2} \langle K^*y, u_n \rangle u_n \\
 &= \int_0^{\|K\|^2+} \frac{1}{\lambda} dE_\lambda K^*y.
 \end{aligned}$$

Usando teoría espectral se puede probar que la ecuación (3.2) sigue siendo válida para el caso más general en que  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  es un operador lineal y acotado con  $Ran(T)$  no cerrado. En este caso,  $y \in Dom(T^\dagger)$  si y sólo si

$$\int_0^{\|T\|^2+} \frac{1}{\lambda^2} d\|E_\lambda T^*y\|^2 < +\infty.$$

Notar que si el operador  $T$  es compacto, esta condición coincide con el criterio de Picard (1.17).

Ahora estamos en condiciones de construir la familia de operadores de regularización espectrales. Para hallar una aproximación estable de la solución del problema inverso mal condicionado (1.1), la idea es reemplazar en (3.2) el integrando no acotado  $\frac{1}{\lambda}$  por una familia de funciones  $\{g_\alpha(\lambda)\}$  continuas por tramos en  $[0, \|T\|^2]$  y tal que para todo  $\lambda \in (0, \|T\|^2]$  se tenga que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ . Luego definimos  $R_\alpha$  como

$$R_\alpha \doteq \int_0^{\|T\|^2+} g_\alpha(\lambda) dE_\lambda T^* = g_\alpha(T^*T)T^*. \tag{3.3}$$

Por construcción el operador  $R_\alpha$  resulta continuo y así, cuando en (1.1) sólo se dispone de un dato con ruido  $y^\delta$  tal que  $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ , la solución regularizada

$$x_\alpha^\delta \doteq R_\alpha y^\delta \doteq \int_0^{\|T\|^2+} g_\alpha(\lambda) dE_\lambda T^*y^\delta$$

se puede calcular de manera estable.

Veamos ahora qué condiciones debe satisfacer  $\{g_\alpha\}$  para que la familia de operadores  $\{R_\alpha\}$  dada en (3.3) sea una familia de operadores de regularización para  $T^\dagger$ .

**Definición 3.1.** Sea  $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$  una familia paramétrica de funciones  $g_\alpha : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  para  $\alpha \in (0, \alpha_0)$ . Diremos que  $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$  es un “*método de regularización espectral*” (MRE), si satisface las siguientes hipótesis:

(H1) Para todo  $\alpha \in (0, \alpha_0)$ ,  $g_\alpha(\lambda)$  es continua por tramos para  $\lambda \in [0, +\infty)$  y continua por derecha en los puntos de discontinuidad.

(H2) Existe una constante  $C > 0$  (independiente de  $\alpha$ ) tal que  $|\lambda g_\alpha(\lambda)| \leq C$  para todo  $\lambda \in [0, +\infty)$ , para todo  $\alpha \in (0, \alpha_0)$ .

(H3) Para todo  $\lambda \in (0, +\infty)$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ .

**Observación 3.2.** La hipótesis (H3) implica que  $C \geq 1$ , pues  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} |\lambda g_\alpha(\lambda)| = 1$ .

Dado el problema (1.1), es decir, dado un operador  $T$  lineal y acotado, es suficiente con que  $g_\alpha(\lambda)$  esté definida y satisfaga (H1)-(H3) en  $[0, \|T\|^2]$ , o con más generalidad, en cualquier intervalo que contenga al espectro de  $T^*T$ , pues  $E_\lambda$  es “constante” fuera de tales intervalos. Es oportuno aclarar aquí que en la Sección 2.1 llamamos “*método de regularización*” a un par formado por la familia de operadores de regularización y la regla de elección de parámetros. Aquí llamamos “*método de regularización espectral*” a la familia de funciones  $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ . De aquí en adelante denotaremos con  $\{g_\alpha\}$  al MRE  $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$  y con  $\{R_\alpha\}$  a la familia de operadores  $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$  definida en (3.3) a partir de  $\{g_\alpha\}$ .

El siguiente resultado permite afirmar que si  $\{g_\alpha\}$  es un MRE entonces  $R_\alpha \rightarrow T^\dagger$  puntualmente sobre  $Dom(T^\dagger)$  cuando  $\alpha \rightarrow 0^+$  de lo cual se sigue, en virtud de la Proposición 2.3, que  $\{R_\alpha\}$  es una familia de operadores de regularización para  $T^\dagger$ . En tal caso diremos que  $\{R_\alpha\}$  es una “*familia de regularización espectral para  $T^\dagger$* ”, puesto que cada uno de sus elementos está definido en términos de una integral con respecto a la familia espectral  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  asociada al operador  $T^*T$ .

**Teorema 3.3.** Sean  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  y  $\{g_\alpha\}$  un MRE. Entonces, para todo  $y \in Dom(T^\dagger)$ ,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g_\alpha(T^*T)T^*y = T^\dagger y.$$

Si  $y \notin Dom(T^\dagger)$ , entonces  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \|g_\alpha(T^*T)T^*y\| = +\infty$ .

*Demostración.* Ver [12], Teorema 4.1. ■

En el siguiente teorema se proporcionan cotas (en  $\mathcal{X}$  y en  $\mathcal{Y}$ ) para el error asociado al ruido cuando se utiliza un MRE. Para  $\alpha > 0$  definimos

$$G_\alpha \doteq \sup_{\lambda \in [0, \|T\|^2]} |g_\alpha(\lambda)|, \quad (3.4)$$

donde  $\{g_\alpha\}$  es un MRE.

**Teorema 3.4.** Sean  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ,  $\{g_\alpha\}$  un MRE y  $G_\alpha$  como en (3.4). Si  $y, y^\delta \in \mathcal{Y}$  son tales que  $\|y^\delta - y\| \leq \delta$ , entonces

$$\|Tx_\alpha - Tx_\alpha^\delta\| \leq C\delta$$

y

$$\|x_\alpha - x_\alpha^\delta\| \leq \delta\sqrt{CG_\alpha}, \quad (3.5)$$

donde  $C$  es la constante de la hipótesis (H2),  $x_\alpha \doteq R_\alpha y$  y  $x_\alpha^\delta \doteq R_\alpha y^\delta$ .

*Demostración.* Ver [12], Teorema 4.2. ■

Del Teorema anterior se obtiene la siguiente estimación para el error total:

$$\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\| \leq \|x_\alpha - x^\dagger\| + \delta\sqrt{CG_\alpha}. \quad (3.6)$$

Si  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$ , se sigue del Teorema 3.3 que el error de regularización  $\|x_\alpha - x^\dagger\| \rightarrow 0$  cuando  $\alpha \rightarrow 0^+$ . Sin embargo, la hipótesis (H3) implica que  $G_\alpha \rightarrow +\infty$  cuando el parámetro de regularización  $\alpha$  tiende a  $0^+$ . Así, para un nivel de ruido  $\delta > 0$  fijo, el segundo término en (3.6) tiende a  $+\infty$  cuando  $\alpha \rightarrow 0^+$ . A menos que  $\dim(\text{Ran}(T)) < \infty$ , la cota del error asociado al ruido dada en (3.5) es óptima y por ello dicho error también tiende a  $+\infty$  cuando  $\alpha \rightarrow 0^+$  manteniendo un nivel de ruido fijo  $\delta > 0$  (ver Figura 2.1).

Para  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$ ,  $\{g_\alpha\}$  un MRE y  $R_\alpha$  como en (3.3), el “residuo”  $(T^\dagger - R_\alpha)y = x^\dagger - x_\alpha$  (cuya norma es el error de regularización) está dado por

$$x^\dagger - x_\alpha = x^\dagger - g_\alpha(T^*T)T^*y = (I - g_\alpha(T^*T)T^*T)x^\dagger = \int (1 - \lambda g_\alpha(\lambda)) dE_\lambda x^\dagger,$$

donde la penúltima igualdad se sigue de la ecuación normal (1.8) y del hecho que  $x^\dagger$  es una solución de mínimos cuadrados. Para todo  $(\alpha, \lambda)$  para los cuales existe  $g_\alpha(\lambda)$ , definimos ahora la función

$$r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda). \quad (3.7)$$

Luego, se tiene que

$$x^\dagger - x_\alpha = r_\alpha(T^*T)x^\dagger, \quad (3.8)$$

es decir,  $r_\alpha$  es la función asociada a la representación espectral del residuo. Observar que (H1) implica que  $g_\alpha(0) < \infty$  y por lo tanto  $r_\alpha(0) = 1$ .

Daremos ahora una estimación para la tasa de convergencia del error de regularización en términos de una acotación para la función  $r_\alpha$  cuando se tiene la información que  $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu, \rho}$ . Dado un MRE  $\{g_\alpha\}$ , para  $\mu > 0$  sea  $\omega_\mu : (0, \alpha_0) \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función que satisface

$$\lambda^\mu |r_\alpha(\lambda)| \leq \omega_\mu(\alpha) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0), \forall \lambda \geq 0. \quad (3.9)$$

Observar que en virtud de (3.8) y (3.9) se sigue que  $\omega_\mu(\alpha)$  proporciona una cota para el error de regularización bajo el supuesto de que  $x^\dagger \in \mathcal{X}_\mu$ .

**Teorema 3.5.** Sean  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ,  $\{g_\alpha\}$  un MRE y  $r_\alpha$  definida por (3.7). Si  $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu^*, \rho}$  (ver (2.26)) para  $\mu^*, \rho > 0$  y  $\omega_\mu(\alpha)$  satisface (3.9) para  $\mu = \mu^*$  y  $\mu = \mu^* + \frac{1}{2}$ , entonces

$$\|x_\alpha - x^\dagger\| \leq \omega_{\mu^*}(\alpha)\rho \quad (3.10)$$

y

$$\|Tx_\alpha - Tx^\dagger\| \leq \omega_{\mu^* + \frac{1}{2}}(\alpha)\rho. \quad (3.11)$$



*Demostración.* Puesto que  $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu^*, \rho}$ , existe  $w \in \mathcal{X}$  con  $\|w\| \leq \rho$  tal que  $x^\dagger = (T^*T)^{\mu^*} w$ . Entonces se sigue de (3.8) que

$$x^\dagger - x_\alpha = r_\alpha(T^*T)(T^*T)^{\mu^*} w. \quad (3.12)$$

Luego, de (1.38) y del hecho que  $\omega_\mu(\alpha)$  satisface (3.9) para  $\mu = \mu^*$  resulta que

$$\begin{aligned} \|x^\dagger - x_\alpha\|^2 &= \|r_\alpha(T^*T)(T^*T)^{\mu^*} w\|^2 = \int_0^{\|T\|^2+} [r_\alpha(\lambda)\lambda^{\mu^*}]^2 d\|E_\lambda w\|^2 \\ &\leq \omega_{\mu^*}^2(\alpha) \|w\|^2 \leq \omega_{\mu^*}^2(\alpha) \rho^2, \end{aligned}$$

de lo cual se sigue (3.10).

Para probar (3.11) utilizaremos la siguiente identidad que es válida para cualquier  $z \in \mathcal{X}$ ,

$$\|Tz\|^2 = \langle Tz, Tz \rangle = \langle T^*Tz, z \rangle = \left\langle (T^*T)^{\frac{1}{2}} z, (T^*T)^{\frac{1}{2}} z \right\rangle = \left\| (T^*T)^{\frac{1}{2}} z \right\|^2. \quad (3.13)$$

En virtud de (3.12), (3.13) y (1.38) se tiene que

$$\begin{aligned} \|Tx_\alpha - Tx^\dagger\|^2 &= \|Tr_\alpha(T^*T)(T^*T)^{\mu^*} w\|^2 = \left\| (T^*T)^{\frac{1}{2}} r_\alpha(T^*T)(T^*T)^{\mu^*} w \right\|^2 \\ &= \int_0^{\|T\|^2+} \lambda^{2\mu^*+1} r_\alpha^2(\lambda) d\|E_\lambda w\|^2 \leq \omega_{\mu^*+\frac{1}{2}}^2(\alpha) \|w\|^2 \\ &\leq \omega_{\mu^*+\frac{1}{2}}^2(\alpha) \rho^2, \end{aligned}$$

donde la penúltima desigualdad se sigue del hecho que  $\omega_\mu(\alpha)$  satisface (3.9) para  $\mu = \mu^* + \frac{1}{2}$ . Luego, se sigue (3.11) con lo cual hemos probado el teorema.  $\blacksquare$

### 3.1.1. Calificación

En esta sección introduciremos y estudiaremos el concepto de “calificación” de un método de regularización. Como veremos más adelante, este concepto está fuertemente vinculado a ciertos órdenes óptimos de convergencia que pueden alcanzarse mediante la aplicación de tal método, bajo ciertos supuestos *a-priori*.

Es común que la función  $\omega_\mu$  en (3.9) se exprese en términos de potencias de  $\alpha$ , esto es:

$$\omega_\mu(\alpha) \doteq c\alpha^\mu, \quad (3.14)$$

donde  $c$  es una constante positiva independiente de  $\alpha$ . Notar que si  $\omega_\mu$  tiene la forma (3.14), en virtud del Teorema 3.5, la hipótesis “ $x^\dagger \in \mathcal{X}_\mu$ ” resultará en un mejor orden de convergencia del error de regularización cuanto mayor sea  $\mu$  (esto es, cuanto más fuerte sea la hipótesis sobre el grado de regularidad de  $x^\dagger$ ).

Es fácil probar que si  $\omega_\mu(\alpha)$  dada por (3.14) satisface (3.9) para algún  $\mu^*$ , entonces también satisface (3.9) para todo  $\mu \in [0, \mu^*]$ . Más aún, se puede probar que en tal caso  $\lambda^\mu |r_\alpha(\lambda)| = o(\alpha^\mu)$  para todo  $\mu \in (0, \mu^*)$ . El mayor valor de  $\mu$  para el cual se cumple (3.9) está relacionado con el concepto de “*calificación clásica*” de un MRE.

**Definición 3.6.** Sea  $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$  un MRE. Denotemos con  $\mathcal{I}(g_\alpha)$  al conjunto

$$\mathcal{I}(g_\alpha) \doteq \{\mu \geq 0 : \forall \lambda \in [0, +\infty), \exists k > 0 \text{ tal que } \lambda^\mu |r_\alpha(\lambda)| \leq k\alpha^\mu, \forall \alpha \in (0, \alpha_0)\}$$

y sea  $\mu_0 \doteq \sup_{\mu \in \mathcal{I}(g_\alpha)} \mu$ . Si  $0 < \mu_0 < +\infty$ , decimos que  $\{g_\alpha\}$  posee “*calificación clásica de orden  $\mu_0$* ”.

Es oportuno observar aquí que  $\mathcal{I}(g_\alpha)$  es siempre no vacío puesto que  $0 \in \mathcal{I}(g_\alpha)$  en virtud de (H2).

Si un MRE posee calificación clásica, se tiene el siguiente resultado con respecto al error de regularización:

**Corolario 3.7.** Sean  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  y  $\{g_\alpha\}$  un MRE con calificación clásica de orden  $\mu$ . Si  $x^\dagger \in \mathcal{X}_\mu$ , entonces  $\|x_\alpha - x^\dagger\| = O(\alpha^\mu)$  cuando  $\alpha \rightarrow 0^+$ , donde  $x^\dagger \doteq T^\dagger y$ ,  $x_\alpha \doteq R_\alpha y$  y  $\mathcal{X}_\mu$  como en (2.27).

*Demostración.* Es una consecuencia inmediata de la Definición 3.6 y del Teorema 3.5. ■

Es importante observar que si  $\{g_\alpha\}$  es un MRE para el cual  $\mu_0 = +\infty$ , donde  $\mu_0$  está dado por la Definición 3.6, entonces la condición (3.9) con  $\omega_\mu$  dado por (3.14) se satisface para todo  $\mu > 0$ . Luego se deduce del Teorema 3.5 que para cualquier  $\mu > 0$  la hipótesis “ $x^\dagger \in \mathcal{X}_\mu$ ” implica que la tasa de convergencia a cero del error de regularización es  $O(\alpha^\mu)$ . En este caso cuanto mayor regularidad tenga  $x^\dagger$ , mejor será el orden de convergencia del error de regularización. Sin embargo, no ocurre lo mismo cuando  $\{g_\alpha\}$  tiene calificación clásica de orden  $\mu_0$  (i.e. cuando  $0 < \mu_0 < +\infty$ ), pues la mejor tasa de convergencia que se puede obtener para el error de regularización es  $O(\alpha^{\mu_0})$ , la cual se obtiene bajo el supuesto *a-priori* de que  $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu_0}$ . Si se agregan hipótesis adicionales de regularidad sobre  $x^\dagger$  (por ejemplo,  $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu^*}$  con  $\mu^* > \mu_0$ ), la tasa de convergencia del error de regularización no se puede mejorar, i.e., sigue siendo  $O(\alpha^{\mu_0})$ .

En el año 2003, P. Mathé y S. V. Pereverzev ([44]) introdujeron por primera vez la siguiente definición de calificación de un MRE, con lo cual formalizaron y extendieron la noción clásica de este concepto.

**Definición 3.8.** ([44]) Sean  $a > 0$  y  $\rho : (0, a] \rightarrow (0, \infty)$  una función creciente. Se dice que el MRE  $\{g_\alpha\}$  posee *calificación*  $\rho$  si existe una constante  $\gamma \in (0, \infty)$  tal que

$$\sup_{\lambda \in (0, a]} |r_\alpha(\lambda)| \rho(\lambda) \leq \gamma \rho(\alpha) \quad \forall \alpha \in (0, a], \quad (3.15)$$

donde  $r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda)$ .

Es importante notar que según esta definición, la calificación de un MRE es una función (de  $\alpha$ ) y no un número como ocurre con el orden de la calificación clásica (el orden  $\mu_0$ ). Por otra parte, se puede ver inmediatamente que si un MRE tiene calificación clásica de orden  $\mu_0$ , entonces la función  $\rho(\alpha) \doteq \alpha^{\mu_0}$  es calificación según la Definición 3.8 para todo  $\mu \in (0, \mu_0]$ .

Posteriormente, en un intento por extender este concepto, en el año 2004 P. Mathé (ver [42], Teorema 2.3 (ii)) propuso la siguiente definición de “*calificación*” de un MRE.

**Definición 3.9.** ([42]) Sean  $a > 0$  y  $\rho : (0, a] \rightarrow (0, \infty)$  una función creciente. Se dice que el MRE  $\{g_\alpha\}$  posee “*calificación*”  $\rho$  si para todo  $\lambda \in (0, a]$  existe una constante  $c \doteq c(\lambda) > 0$  tal que

$$\inf_{\alpha \in (0, a]} \frac{|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \geq c, \quad (3.16)$$

donde  $r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda)$ .

En su artículo [42] Mathé denominó “*calificación máxima*” a esta calificación definida por (3.16). No obstante, en esta tesis la denominaremos “*calificación según Mathé*”, reservando el nombre “*calificación máxima*” para un concepto que formalizaremos más adelante.

**Observación 3.10.** Es oportuno señalar que la Definición 3.9 de calificación según Mathé, adolece de varios defectos, siendo quizás el más importante que no se deduce de la misma que una calificación según Mathé sea calificación. Esta inconsistencia va más allá de una mera contradicción semántica como lo prueba el Ejemplo 3 del artículo de Mathé ([42]) en el que la función  $\rho(\alpha) \doteq e^{-\frac{k}{\alpha}}$  con  $k > 0$ , es calificación según Mathé del método de Landweber y sin embargo, irónicamente, no es calificación. Por otro lado, la Definición 3.9 origina otras serias objeciones que socavan claramente el sustento de su misma razón de ser. Si bien recientemente Mathé parecería haberse dado cuenta de estas incongruencias (ver [28], Remark 4.2) no ha procedido a reformular adecuadamente el concepto en cuestión.

En virtud de lo anterior y por otros motivos que quedarán claramente justificados en desarrollos posteriores, encontramos conveniente definir el concepto de *calificación máxima* como sigue:

**Definición 3.11.** Sean  $\{g_\alpha\}$  un MRE,  $r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda)$  y  $\rho : (0, a] \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función creciente. Se dice que  $\{g_\alpha\}$  posee “calificación máxima”  $\rho$  si

(i) existe una constante  $\gamma > 0$  tal que

$$\sup_{\lambda \in (0, a]} |r_\alpha(\lambda)| \rho(\lambda) \leq \gamma \rho(\alpha) \quad \text{para todo } \alpha \in (0, a),$$

(ii) para todo  $\lambda \in (0, a]$  existe una constante  $c \doteq c(\lambda) > 0$  tal que

$$\inf_{\alpha \in (0, a)} \frac{|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \geq c.$$

En el Capítulo 7 generalizaremos apropiadamente la definición de calificación clásica y presentaremos importantes implicaciones de esta generalización en el contexto de órdenes de convergencia, resultados recíprocos y conjuntos fuente maximales para problemas inversos mal condicionados concretos.

### 3.1.2. Resultados recíprocos

En la sección anterior vimos que a partir del conocimiento de cierta información *a-priori* sobre  $x^\dagger$ , es posible determinar el mejor orden de convergencia del error de regularización  $\|R_\alpha y - x^\dagger\|$ , como función del parámetro de regularización  $\alpha$ , que se puede obtener con un MRE bajo esa información *a-priori*. Resultados de este tipo se conocen como “*resultados directos*”. Veremos ahora algunos “*resultados recíprocos*”. En este contexto, se definen como tales a aquellos que permiten deducir información sobre la solución exacta (e.g. sus propiedades de regularidad o estimaciones de su magnitud) a partir del orden de convergencia del error de regularización o del error total de un MRE ([12], [49], [50]).

Para los resultados recíprocos resultan importantes los índices  $\mu > 0$  para los cuales existen constantes  $q, \gamma > 0$  (independientes de  $\alpha$ ) tales que

$$\lambda^\mu |r_\alpha(\lambda)| \geq \gamma \alpha^\mu, \quad \forall \lambda \geq q\alpha. \quad (3.17)$$

Es importante observar que si  $\mu$  verifica la condición (3.17), entonces  $\lambda^\mu |r_\alpha(\lambda)|$  no es  $o(\alpha^\mu)$  cuando  $\alpha \rightarrow 0^+$ . En consecuencia, si un MRE tiene calificación clásica de orden  $\mu_0$ , se tiene que ningún valor de  $\mu$  menor que  $\mu_0$  puede verificar la condición (3.17) (ver la observación previa a la Definición 3.6). Por otro lado, el orden  $\mu_0$  de la calificación clásica puede o no verificar (3.17). Para los índices  $\mu > 0$  que satisfacen la condición (3.17) se tienen el siguiente resultado recíproco y un corolario que presentamos a continuación del mismo.

**Teorema 3.12.** *Sean  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ,  $\{g_\alpha\}$  un MRE y  $\mu > 0$  tal que satisfice (3.17). Si  $\|x_\alpha - x^\dagger\| = O(\alpha^\mu)$  cuando  $\alpha \rightarrow 0^+$  entonces  $x^\dagger \in \mathcal{X}_\mu$ , donde  $x^\dagger \doteq T^\dagger y$ ,  $x_\alpha \doteq R_\alpha y$  y  $\mathcal{X}_\mu$  es como en (2.27).*

*Demostración.* De (3.8), (1.38) y del hecho que  $\mu$  satisfice la condición (3.17) se tiene que

$$\begin{aligned} \|x_\alpha - x^\dagger\|^2 &= \int_0^{\|T\|^2 +} r_\alpha^2(\lambda) d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 \geq \int_{q\alpha}^{\|T\|^2 +} r_\alpha^2(\lambda) d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 \\ &\geq \gamma^2 \alpha^{2\mu} \int_{q\alpha}^{\|T\|^2 +} \lambda^{-2\mu} d\|E_\lambda x^\dagger\|^2. \end{aligned}$$

Como  $\|x_\alpha - x^\dagger\| = O(\alpha^\mu)$  cuando  $\alpha \rightarrow 0^+$ , se deduce que

$$\int_{q\alpha}^{\|T\|^2 +} \lambda^{-2\mu} d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 = O(1) \quad \text{cuando } \alpha \rightarrow 0^+$$

y entonces

$$\int_0^{\|T\|^2 +} \lambda^{-2\mu} d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 < +\infty. \quad (3.18)$$

Así, definiendo

$$w \doteq \int_0^{\|T\|^2 +} \lambda^{-\mu} dE_\lambda x^\dagger,$$

se tiene entonces que  $(T^*T)^\mu w = \int_0^{\|T\|^2 +} \lambda^\mu \lambda^{-\mu} dE_\lambda x^\dagger = x^\dagger$ . Por lo tanto,  $x^\dagger \in \mathcal{X}_\mu$ . ■

**Observación 3.13.** Es importante observar que si el índice  $\mu_0$  dado en la Definición 3.6 es infinito, la condición (3.17) no se cumple para ningún valor de  $\mu$  y entonces no se puede aplicar el teorema anterior.

**Corolario 3.14.** Sean  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  y  $\{g_\alpha\}$  un MRE con calificación clásica de orden  $\mu$  tal que  $\mu$  satisface (3.17). Entonces  $x^\dagger \in \mathcal{X}_\mu$  si y sólo si  $\|x_\alpha - x^\dagger\| = O(\alpha^\mu)$  cuando  $\alpha \rightarrow 0^+$ , donde  $x^\dagger \doteq T^\dagger y$ ,  $x_\alpha \doteq R_\alpha y$  y  $\mathcal{X}_\mu$  es como en (2.27).

*Demostración.* Se sigue inmediatamente del Corolario 3.7 y del Teorema 3.12. ■

Este corolario pone claramente de manifiesto la estrecha vinculación existente entre los conjuntos fuente y el orden de convergencia del error de regularización o, equivalentemente, entre las propiedades de regularidad de la solución exacta y el concepto de calificación. En los Capítulos 6 y 7 probaremos nuevos resultados recíprocos que involucran órdenes de convergencia y conjuntos fuente más generales que los presentados en esta sección.

En la demostración del Teorema 3.12 se probó que la condición (3.18) es suficiente para que  $x^\dagger \in \mathcal{X}_\mu$ . Más aún, es fácil ver que la condición fuente  $x^\dagger \in \mathcal{X}_\mu$  es equivalente a (3.18). Ahora bien, se sigue de (3.18) que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^t \lambda^{-2\mu} d \|E_\lambda x^\dagger\|^2 = 0,$$

lo cual implica que

$$\|E_t x^\dagger\|^2 = \int_0^t d \|E_\lambda x^\dagger\|^2 = \int_0^t \lambda^{2\mu} \lambda^{-2\mu} d \|E_\lambda x^\dagger\|^2 = o(t^{2\mu}) \quad \text{cuando } t \rightarrow 0^+.$$

Luego, si  $x^\dagger \in \mathcal{X}_\mu$  entonces se tiene la estimación

$$\|E_t x^\dagger\|^2 = o(t^{2\mu}) \quad \text{cuando } t \rightarrow 0^+.$$

Aunque el recíproco en general no es cierto, vale el siguiente resultado.

**Lema 3.15.** Sean  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ . Si para un cierto valor de  $\mu > 0$ ,  $x^\dagger \doteq T^\dagger y$  satisface

$$\|E_t x^\dagger\|^2 = O(t^{2\mu}) \quad \text{cuando } t \rightarrow 0^+ \tag{3.19}$$

entonces

$$x^\dagger \in \bigcap_{\nu < \mu} \mathcal{X}_\nu \supset \mathcal{X}_\mu, \quad (3.20)$$

donde  $\mathcal{X}_\mu$  es como en (2.27).

*Demostración.* Sean  $0 < \nu < \mu$  y  $\varepsilon > 0$ . Para probar que  $x^\dagger \in \mathcal{X}_\nu$ , veremos que se satisface la condición (3.18) con  $\nu$  en lugar de  $\mu$ . Integrando por partes se obtiene

$$\int_\varepsilon^{\|T\|^2+} \lambda^{-2\nu} d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 = \|T\|^{-4\nu} \|x^\dagger\|^2 - \varepsilon^{-2\nu} \|E_\varepsilon x^\dagger\|^2 + 2\nu \int_\varepsilon^{\|T\|^2+} \lambda^{-2\nu-1} \|E_\lambda x^\dagger\|^2 d\lambda.$$

Entonces en virtud de (3.19) existe una constante positiva  $c$  independiente de  $\varepsilon$  tal que

$$\int_\varepsilon^{\|T\|^2+} \lambda^{-2\nu} d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 \leq c \left( 1 + \int_\varepsilon^{\|T\|^2+} \lambda^{2\mu-2\nu-1} d\lambda \right). \quad (3.21)$$

Como  $2\mu - 2\nu - 1 > -1$  (pues  $\mu > \nu$ ) se tiene que

$$\int_\varepsilon^{\|T\|^2+} \lambda^{2\mu-2\nu-1} d\lambda = O(1) \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0^+. \quad (3.22)$$

Luego, se deduce de (3.21) y (3.22) que

$$\int_0^{\|T\|^2+} \lambda^{-2\nu} d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 < +\infty$$

y en consecuencia,  $x^\dagger \in \mathcal{X}_\nu$ . ■

**Observación 3.16.** Para  $t$  cercano a 0, el operador  $E_t$  actúa como un “filtro pasa altas” que permite pasar sólo las altas frecuencias (asociadas a los valores del espectro cercanos a 0). La condición (3.19) impone entonces un orden de convergencia a cero para las componentes de alta frecuencia de  $x^\dagger$ . Cuando  $T$  es un operador compacto con sistema singular  $\{(\sigma_n; u_n, v_n)\}$  y  $\text{Ran}(T)$  no es cerrado, entonces (3.19) se convierte en

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left| \langle x^\dagger, u_n \rangle \right|^2 = O(\sigma_k^{4\mu}) \quad \text{cuando } k \rightarrow +\infty,$$

lo que establece una condición de decrecimiento de los coeficientes de Fourier de  $x^\dagger$  en términos de los valores singulares de  $T$ .



A continuación presentamos un resultado recíproco que resulta muy apropiado en el caso en que  $\mu$  no satisface la condición (3.17) (ver Observación 3.13), y por lo tanto no es aplicable el Teorema 3.12.

**Proposición 3.17.** *Sean  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ . Sea  $\{g_\alpha\}$  un MRE tal que*

$$G_\alpha \leq \frac{\hat{c}}{\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad (3.23)$$

para alguna constante  $\hat{c} > 0$ , donde  $G_\alpha$  es como en (3.4). Si  $\|x_\alpha - x^\dagger\| = O(\alpha^\mu)$  para algún  $\mu > 0$  entonces  $x^\dagger$  satisface (3.19) y (3.20), donde  $x_\alpha \doteq R_\alpha y$  y  $x^\dagger \doteq T^\dagger y$ .

*Demostración.* Ver [12], Proposición 4.13. ■

Veamos ahora un resultado recíproco que involucra datos con ruido. Este es el primer resultado de este tipo y fue probado por A. Neubauer en 1994 ([49]).

**Teorema 3.18.** *Sean  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  y  $\{g_\alpha\}$  un MRE tal que  $\mu_0$  dado en la Definición 3.6 verifica  $\mu_0 \in (0, +\infty]$ . Supongamos que existen constantes positivas  $\lambda_1 \leq \|T\|^2$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  y  $c_1 > 1$  tales que*

- (a)  $0 \leq r_\alpha(\lambda) \leq 1, \forall \alpha > 0, 0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ ;
- (b)  $r_\alpha(\lambda) \geq \gamma_1, \forall 0 \leq \lambda < \alpha \leq \lambda_1$ ;
- (c)  $|r_\alpha(\lambda)|$  es monótona creciente con respecto a  $\alpha$  para  $\lambda \in (0, \|T\|^2]$ ;
- (d)  $g_\alpha(c_1\alpha) \geq \frac{\gamma_2}{\alpha}, \forall 0 < c_1\alpha \leq \lambda_1$ ;
- (e)  $g_\alpha(\lambda) \geq g_\alpha(\tilde{\lambda}),$  para  $0 < \alpha \leq \lambda \leq \tilde{\lambda} \leq \lambda_1$ ; y
- (f)  $\sqrt{\lambda} |g_\alpha(\lambda)| \leq \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}$ .

Entonces para todo  $0 < \mu < \mu_0$  se tiene que

$$\sup_{y^\delta \in \mathcal{Y}} \left\{ \inf_{\alpha > 0} \|x_\alpha^\delta - x^\dagger\| : \|Q(y - y^\delta)\| \leq \delta \right\} = O\left(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}\right) \quad \text{cuando } \delta \rightarrow 0^+ \quad (3.24)$$

si y sólo si  $x^\dagger$  satisface (3.19). Además, si  $\mu_0 < +\infty$  y verifica (3.17), entonces la tasa (3.24) con  $\mu = \mu_0$  es equivalente a la condición fuente  $x^\dagger \in \mathcal{X}_{\mu_0}$ .

*Demostración.* Ver [49], Teorema 2.5. ■

Este resultado dice esencialmente que, bajo ciertas condiciones sobre la familia de funciones  $\{g_\alpha\}$  que define el MRE, la condición “ $x^\dagger \in \mathcal{X}_\mu$ ” es necesaria para el siguiente orden de convergencia a cero del error total:

$$\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\| = O\left(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}\right) \quad \text{cuando } \delta \rightarrow 0^+. \quad (3.25)$$

Mas adelante, en 1997, A. Neubauer ([50]) demostró además el resultado recíproco anterior para el MRE conocido como “*regularización de Tikhonov-Phillips*”. Este método será introducido en la Sección 3.2.2.

### 3.1.3. Saturación

Otro concepto fuertemente ligado a los órdenes óptimos de convergencia de los MRE es el de “*saturación*”. Este término se utiliza para describir el comportamiento de algunos métodos para los cuales el orden de convergencia en (3.25) no es válido para todo  $\mu > 0$ , sino sólo hasta un valor finito  $\mu_0$ , que resulta ser el orden de la calificación clásica del MRE. En 1994, Neubauer ([49]) introdujo por primera vez “la idea” del concepto de saturación para métodos de regularización. Si bien Neubauer no formalizó el concepto de saturación, demostró que ciertos métodos de regularización espectrales “*saturan*” en el sentido que son incapaces de continuar extrayendo información adicional sobre la solución exacta aún bajo hipótesis adicionales de regularidad sobre la misma. Más precisamente, Neubauer probó el siguiente resultado.

**Teorema 3.19.** *Sean  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  tal que  $\text{Ran}(T)$  no es cerrado y  $\{g_\alpha\}$  un MRE con calificación clásica de orden  $\mu_0$  tal que  $\mu_0$  verifica la condición (3.17). Supongamos además que  $g_\alpha$  y  $r_\alpha$  satisfacen las hipótesis (a)-(f) del Teorema 3.18. Si  $\alpha(\delta, y^\delta)$  es una regla de elección del parámetro tal que*

$$\sup_{y^\delta \in \mathcal{Y}} \left\{ \left\| x_{\alpha(\delta, y^\delta)}^\delta - x^\dagger \right\| : \|Q(y - y^\delta)\| \leq \delta \right\} = o\left(\delta^{\frac{2\mu_0}{2\mu_0+1}}\right) \quad \text{cuando } \delta \rightarrow 0^+,$$

entonces  $x^\dagger \doteq T^\dagger y = 0$ .

*Demostración.* Ver [49], Teorema 3.1. ■

Notar que este resultado de Neubauer nos dice que, bajo las hipótesis del Teorema, ninguna regla de elección del parámetro puede resultar en un método para el cual el error total converja a cero estrictamente más rápido que  $O\left(\delta^{\frac{2\mu_0}{2\mu_0+1}}\right)$ , excepto en el caso trivial en que  $x^\dagger = 0$ . En 1997, Neubauer ([50]) demostró que este fenómeno de saturación ocurre en particular con el método de Tikhonov-Phillips. Sin embargo, el concepto de saturación no ha sido aún rigurosamente formalizado. En el Capítulo 6 desarrollaremos una teoría general de saturación para métodos de regularización arbitrarios y exploraremos sus implicaciones. Este desarrollo constituye otro de los aportes originales de esta tesis.

## 3.2. Casos particulares

### 3.2.1. Descomposición en valores singulares truncada

El “método de descomposición en valores singulares truncada” oTSVD (por su sigla en inglés) se obtiene ignorando los valores del espectro de  $T^*T$  que están por debajo de un cierto umbral dado por el parámetro de regularización  $\alpha$ . Así, para  $\alpha \in (0, \alpha_0)$  la familia  $\{g_\alpha\}$  se define por

$$g_\alpha(\lambda) \doteq \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{si } \lambda \in [\alpha, +\infty) \\ 0, & \text{si } \lambda \in [0, \alpha). \end{cases} \quad (3.26)$$

Es fácil ver que  $\{g_\alpha\}$  es un MRE y que la hipótesis (H2) se verifica con  $C = 1$ . La condición (3.9) se satisface con  $\omega_\mu(\alpha) = \alpha^\mu$  para todo  $\mu > 0$ , de lo cual se sigue que  $\mu_0 = +\infty$ , donde  $\mu_0$  es como en la Definición 3.6. Luego, este método no posee calificación clásica.

Como  $\mu_0 = +\infty$ , no hay índices  $\mu > 0$  para los cuales se satisfaga la condición (3.17) y en consecuencia, no es posible derivar resultados recíprocos por el Teorema 3.12, pues este no es aplicable. Sin embargo, sí es válido el resultado recíproco de la Proposición 3.17 en virtud de que, en este caso,  $G_\alpha = \frac{1}{\alpha}$ .

La solución regularizada a partir del dato con ruido  $y^\delta$  está dada por

$$x_\alpha^\delta \doteq g_\alpha(T^*T)T^*y^\delta = \int_0^{\|T\|^2 + \frac{1}{\alpha}} \frac{1}{\lambda} dE_\lambda T^*y^\delta. \quad (3.27)$$

Observar que en el caso en que  $T = K$  es compacto con sistema singular  $\{(\sigma_n; u_n, v_n)\}$  entonces (3.27) se puede calcular usando (1.34) y (1.12) de la siguiente manera

$$x_\alpha^\delta = \sum_{n:\sigma_n^2 \geq \alpha} \frac{1}{\sigma_n^2} \langle K^*y^\delta, u_n \rangle u_n = \sum_{n:\sigma_n^2 \geq \alpha} \frac{1}{\sigma_n^2} \langle y^\delta, K u_n \rangle u_n = \sum_{n:\sigma_n^2 \geq \alpha} \frac{1}{\sigma_n} \langle y^\delta, v_n \rangle u_n,$$

la cual puede verse como una versión “truncada” de la descomposición en valores singulares de  $K^\dagger y$  dada en (1.18). Esto justifica el nombre del método. La expresión anterior también puede interpretarse como la resultante del proceso de sustituir  $K$  por un operador de rango finito  $K_\alpha$  definido para  $x \in \mathcal{X}$  por

$$K_\alpha x \doteq \sum_{n:\sigma_n^2 \geq \alpha} \sigma_n \langle x, v_n \rangle u_n,$$

y luego calcular la solución regularizada a partir del dato con ruido mediante  $x_\alpha^\delta = K_\alpha^\dagger y^\delta$ , es decir, como un método de proyección. Hemos visto al final de la Sección 2.3 que la descomposición en valores singulares truncada es, en el sentido que allí se precisó, un método de proyección óptimo. Como señalamos anteriormente, el valor de  $\alpha$  es el umbral por debajo del cual los valores singulares son reemplazados por 0 y actúa como un parámetro de regularización.

### 3.2.2. Regularización de Tikhonov-Phillips

En el método de regularización de Tikhonov-Phillips ([51], [61], [62]) la familia de funciones  $\{g_\alpha\}$  está dada por

$$g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda + \alpha} \quad \text{para } \alpha \in (0, \alpha_0), \lambda \in [0, \|T\|^2]. \quad (3.28)$$

Se puede ver inmediatamente que  $\{g_\alpha\}$  es efectivamente un MRE y que satisface (H2) con  $C = 1$ . Luego, la solución regularizada a partir del dato con ruido  $y^\delta$  está dada por

$$x_\alpha^\delta \doteq g_\alpha(T^*T)T^*y^\delta = (T^*T + \alpha I)^{-1}T^*y^\delta, \quad (3.29)$$

es decir,  $x_\alpha^\delta$  está definida mediante la ecuación lineal  $T^*Tx_\alpha^\delta + \alpha x_\alpha^\delta = T^*y^\delta$ .

Para determinar si este método posee calificación clásica, y en caso afirmativo hallar su orden, se debe encontrar una función  $\omega_\mu(\alpha)$  del tipo dado en (3.14), i.e.  $\omega_\mu(\alpha) = c\alpha^\mu$  de tal manera que sea cota superior de la función

$$h_\mu(\lambda) \doteq \lambda^\mu |r_\alpha(\lambda)| = \lambda^\mu \frac{\alpha}{\alpha + \lambda}.$$

Observar que para  $\mu < 1$ , se tiene que  $h_\mu(\lambda)$  alcanza su máximo en  $\lambda = \mu\alpha/(1 - \mu)$  y entonces  $h_\mu(\lambda) \leq \mu^\mu(1 - \mu)^{1-\mu}\alpha^\mu \leq \alpha^\mu$ . Para  $\mu \geq 1$ ,  $h_\mu(\lambda)$  es estrictamente creciente y alcanza su mayor valor en  $\|T\|^2$ . Entonces, definimos  $\omega_\mu$  como

$$\omega_\mu(\alpha) \doteq \begin{cases} \alpha^\mu, & \text{para } \mu \leq 1 \\ \|T\|^{2\mu-2} \alpha, & \text{para } \mu > 1. \end{cases}$$

Luego, se deduce que  $\{g_\alpha\}$  tiene calificación clásica de orden  $\mu_0 = 1$ , pues (3.9) se satisface con  $\omega_\mu(\alpha) = \alpha^\mu$  para todo  $\mu \in [0, 1]$  y es inmediato probar que la condición (3.17) se satisface con  $q = 1$  y  $\gamma = \frac{1}{2}$ . Por lo tanto podemos aplicar el Teorema 3.12, del cual se sigue que un orden de convergencia para el error de regularización de la forma  $\|x_\alpha - x^\dagger\| = O(\alpha)$  implica que  $x^\dagger \in \mathcal{X}_1 = \text{Ran}(T^*T)$ . Además, como  $G_\alpha = \frac{1}{\alpha}$ , se cumple (3.23) y la Proposición 3.17 permite afirmar que si  $\|x_\alpha - x^\dagger\| = O(\alpha^\mu)$  para

algún  $\mu \in (0, 1)$  (notar que en este caso no puede obtenerse una tasa de convergencia del error de regularización mejor que  $O(\alpha)$ ) entonces  $x^\dagger \in \bigcap_{\nu < \mu} \mathcal{X}_\nu$ .

Con respecto al resultado recíproco para datos con ruido, es sencillo verificar que este MRE satisface todas las hipótesis del Teorema 3.18 y por lo tanto

$$\sup_{y^\delta \in \mathcal{Y}} \left\{ \inf_{\alpha > 0} \|x_\alpha^\delta - x^\dagger\| : \|Q(y - y^\delta)\| \leq \delta \right\} = O\left(\delta^{\frac{2}{3}}\right) \quad \text{cuando } \delta \rightarrow 0^+$$

si y sólo si  $x^\dagger \in \mathcal{X}_1$  (ver [50], Teorema 2.6). Como señalamos en la sección anterior, Neubauer también demostró que para la regularización de Tikhonov-Phillips ocurre el fenómeno de saturación, es decir, que si con una regla de elección del parámetro se obtiene que la tasa de convergencia del error total es  $o(\delta^{\frac{2}{3}})$ , entonces  $x^\dagger = 0$ , siempre que  $\text{Ran}(T)$  sea no cerrado (Teorema 3.19). En este sentido  $O(\delta^{\frac{2}{3}})$  es un orden de convergencia óptimo para el método de Tikhonov-Phillips.

Finalmente, es importante observar que para un operador compacto  $K$  con sistema singular  $\{(\sigma_n; u_n, v_n)\}$ , (3.29) tiene la forma

$$x_\alpha^\delta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha} \langle y^\delta, v_n \rangle u_n.$$

Una comparación con (1.18) permite ver claramente cómo Tikhonov-Phillips estabiliza las aproximaciones: los errores en  $\langle y, v_n \rangle$  ya no son amplificados por los factores  $1/\sigma_n$ , sino por los factores  $\sigma_n/(\sigma_n^2 + \alpha)$ , los cuales permanecen acotados cuando  $n \rightarrow \infty$  y, más aún, tienden a 0.

### 3.2.3. Método de Showalter o regularización asintótica

El método de regularización asintótica o método de Showalter se construye a partir de la solución  $u_\delta : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathcal{X}$  del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u_\delta'(t) + T^* T u_\delta(t) = T^* y^\delta, & t \geq 0, \\ u_\delta(0) = 0, \end{cases} \quad (3.30)$$

definiendo  $x_\alpha^\delta \doteq u_\delta \left(\frac{1}{\alpha}\right)$ . Si se reemplaza  $y^\delta$  por  $y$  en (3.30), entonces escribimos  $u$  y  $x_\alpha$  en lugar de  $u_\delta$  y  $x_\alpha^\delta$ . Veamos que

$$v(t) \doteq \int \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} dE_\lambda T^* y^\delta, \quad t \geq 0$$

es solución de (3.30), donde  $\{E_\lambda\}$  es la familia espectral asociada a  $T^*T$ . Como

$$v'(t) = \int e^{-\lambda t} dE_\lambda T^* y^\delta$$

(esta derivación puede justificarse por el Teorema de la Convergencia Dominada), se tiene que

$$T^*T v(t) = \int \lambda \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} dE_\lambda T^* y^\delta = T^* y^\delta - v'(t),$$

lo cual junto al hecho obvio que  $v(0) = 0$ , permite afirmar que  $v(t)$  es efectivamente solución del problema de valores iniciales (3.30).

Luego,

$$x_\alpha^\delta = v\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \int \frac{1 - e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}}{\lambda} dE_\lambda T^* y^\delta.$$

Como la función

$$g_\alpha(\lambda) = \frac{(1 - e^{-\frac{\lambda}{\alpha}})}{\lambda} = \int_0^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\lambda s} ds \quad (3.31)$$

es continua para todo  $\lambda \geq 0$ , resulta que  $g_\alpha \in \mathcal{M}_0$  y así,  $x_\alpha^\delta = g_\alpha(T^*T)T^* y^\delta$ . Se puede ver fácilmente que  $g_\alpha$  satisface las hipótesis (H1)-(H3) de la Definición 3.1 y por lo tanto es un MRE. La hipótesis (H2) se verifica con  $C = 1$ .

Este método se llama “regularización asintótica” porque en (3.31) no se integra hasta  $+\infty$ , sino sólo hasta  $1/\alpha$ , donde  $\alpha$  actúa como parámetro de regularización. Cuando  $\alpha \rightarrow 0^+$ , este extremo superior de integración se hace más grande y así, la exactitud  $\|x_\alpha - x^\dagger\|$  mejora (el error de regularización tiende a 0), pero eventualmente el error asociado al ruido  $\|x_\alpha^\delta - x_\alpha\|$  empeora (recordar que se sigue del Teorema 3.4 que  $\|x_\alpha^\delta - x_\alpha\| \leq \delta \sqrt{CG_\alpha} = \delta \sqrt{1/\alpha}$ ).

Veamos ahora si este MRE posee calificación clásica. La función

$$h_\mu(\lambda) \doteq \lambda^\mu |r_\alpha(\lambda)| = \lambda^\mu e^{-\frac{\lambda}{\alpha}},$$

alcanza su máximo en  $\lambda = \alpha\mu$  y entonces  $h_\mu(\lambda) \leq \alpha^\mu \mu^\mu e^{-\mu}$  para todo  $\mu > 0$ . Entonces la condición (3.9) se satisface con  $\omega_\mu(\alpha) \doteq \alpha^\mu \mu^\mu e^{-\mu}$  para todo  $\mu > 0$ , de lo cual se sigue que  $\mu_0 = +\infty$ . Luego, este método no posee calificación clásica.

Al igual que con TSVD, puesto que  $\mu_0 = +\infty$ , no se puede aplicar el resultado recíproco dado en el Teorema 3.12, pero como  $G_\alpha = \frac{1}{\alpha}$  se tiene el resultado recíproco más débil dado por la Proposición 3.17.

Se sigue del Teorema 3.3 y del hecho que  $x_\alpha = u(t)$  para  $t = 1/\alpha$  que si  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} x_\alpha = T^\dagger y, \quad (3.32)$$

mientras que si  $y \notin \text{Dom}(T^\dagger)$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t)\| = +\infty$ .

Resulta interesante observar que puesto que  $v'(t) \rightarrow 0$  y  $x_\alpha \rightarrow x^\dagger$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , la solución exacta  $x^\dagger$  se puede interpretar como el estado estacionario de la solución del problema de valores iniciales (3.30). Asimismo, es importante observar que la ecuación diferencial en (3.30) se convierte en la ecuación normal  $T^* T x^\dagger = T^* y$  para “ $t = +\infty$ ”.

Otra manera de escribir (3.32) para  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$  es usando (3.31), es decir,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g_\alpha(T^* T) T^* y = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_0^{\frac{1}{\alpha}} e^{-s T^* T} ds T^* y = T^\dagger y.$$

Esta expresión está muy relacionada con la “*fórmula de Showalter*” ([55], [56]) dada por

$$\int_0^{+\infty} e^{-s T^* T} ds T^* y = T^\dagger y$$

que vale para todo  $y \in \text{Dom}(T^\dagger)$ ; si  $y \notin \text{Dom}(T^\dagger)$  entonces esta integral diverge. Por ello, a este método se lo conoce también como “*método de Showalter*”.



### 3.2.4. Métodos de filtro

Los métodos de filtro se definen sólo para operadores compactos ([34]). Sean  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  espacios de Hilbert y  $K : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un operador lineal compacto con sistema singular  $\{(\sigma_n; u_n, v_n)\}$ . En la Sección 1.2 hemos visto, a partir de la descomposición en valores singulares de la inversa generalizada de Moore-Penrose de  $K$  (1.18), cómo los errores en el dato  $y$  afectan a la mejor solución aproximada  $K^\dagger y$ . Si  $\dim(\text{Ran}(K)) = \infty$  (lo cual es equivalente a  $\text{Ran}(K)$  no cerrado y en efecto,  $K^\dagger$  no acotado) entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = 0$ . Por ello, un error de una determinada magnitud en el dato  $y$  se puede amplificar por un factor arbitrariamente grande (pues  $1/\sigma_n$  crece sin cota). Los métodos de filtro tienen como objetivo amortiguar esos efectos de amplificación de errores. La idea es sustituir en (1.18) el factor no acotado  $1/\sigma_n$  por  $q(\alpha, \sigma_n)/\sigma_n$ , donde la función  $q(\alpha, \sigma_n)$ , conocida como “*filtro*”, se elige de tal manera que  $q(\alpha, \sigma_n)/\sigma_n$  resulte acotado como función de  $\sigma_n$  para todo  $\alpha > 0$  fijo y tal que  $q(\alpha, \sigma_n) \rightarrow 1$  cuando  $\alpha \rightarrow 0^+$ .

**Definición 3.20.** Sean  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  espacios de Hilbert y  $K : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un operador lineal compacto con sistema singular  $\{(\sigma_n; u_n, v_n)\}$ . Se dice que la función  $q : (0, \infty) \times (0, \|K\|] \rightarrow \mathbb{R}$  es un “*filtro de regularización para  $K$* ” si satisface las siguientes condiciones:

(1) Existe una constante positiva  $k$  independiente de  $\alpha$  tal que  $|q(\alpha, \sigma)| \leq k$  para todo  $\alpha > 0$  y para todo  $\sigma \in (0, \|K\|]$ .

(2) Para cada  $\alpha > 0$  existe una constante positiva  $c(\alpha)$  tal que  $|q(\alpha, \sigma)| \leq c(\alpha)\sigma$  para todo  $\sigma \in (0, \|K\|]$ .

(3)  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} q(\alpha, \sigma) = 1$  para todo  $\sigma \in (0, \|K\|]$ .

Del siguiente resultado se sigue que los operadores que resultan de sustituir  $1/\sigma_n$  por un filtro de regularización para  $K$ , forman una familia de operadores de regularización para  $K^\dagger$ .

**Teorema 3.21.** Sean  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  espacios de Hilbert,  $K : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un operador lineal compacto con sistema singular  $\{(\sigma_n; u_n, v_n)\}$  y  $q : (0, \infty) \times (0, \|K\|] \rightarrow \mathbb{R}$  un filtro de

regularización para  $K$ . Para  $\alpha > 0$  sea  $R_\alpha : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  definido por

$$R_\alpha y \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(\alpha, \sigma_n)}{\sigma_n} \langle y, v_n \rangle u_n, \quad y \in \mathcal{Y}. \quad (3.33)$$

Entonces  $\{R_\alpha\}$  es una familia de operadores de regularización para  $K^\dagger$ .

*Demostración.* Ver [34], Teorema 2.6. ■

La familia  $\{R_\alpha\}$  definida por (3.33) se conoce como “método de filtro” (asociado al filtro  $q(\alpha, \sigma)$ ).

Si  $\{R_\alpha\}$  es un método de filtro con filtro de regularización  $q(\alpha, \sigma)$  continuo por tramos como función de  $\sigma$  en  $(0, \|K\|]$  para todo  $\alpha > 0$ , entonces  $\{g_\alpha\}$  es un MRE, donde

$$g_\alpha(\lambda) \doteq \frac{q(\alpha, \sqrt{\lambda})}{\lambda} \quad \text{para todo } \lambda \in (0, \|K\|^2]. \quad (3.34)$$

En efecto, la hipótesis (H1) de la Definición 3.1 se verifica debido a que el filtro  $q$  es continuo por tramos como función de  $\sigma$  en  $(0, \|K\|]$  para todo  $\alpha > 0$ . La hipótesis (H2) se sigue inmediatamente de la condición (1) de la Definición 3.20 y (H3) resulta de la condición (3). Veamos ahora que el método de filtro  $\{R_\alpha\}$  es en efecto la familia de regularización espectral para  $K^\dagger$  obtenida con  $g_\alpha$  dado por (3.34). Sea  $y \in \mathcal{Y}$ , entonces

$$\begin{aligned} R_\alpha y &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(\alpha, \sigma_n)}{\sigma_n} \langle y, v_n \rangle u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n g_\alpha(\sigma_n^2) \langle y, v_n \rangle u_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} g_\alpha(\sigma_n^2) \langle y, \sigma_n v_n \rangle u_n = \sum_{n=1}^{\infty} g_\alpha(\sigma_n^2) \langle y, K u_n \rangle u_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} g_\alpha(\sigma_n^2) \langle K^* y, u_n \rangle u_n = \int_0^{\|K\|^2+} g_\alpha(\lambda) dE_\lambda K^* y. \end{aligned}$$

En este sentido, todo método de filtro es un método de regularización espectral.

Algunos ejemplos de filtros de regularización usuales son:

**Ejemplo 3.22.** Sea  $q$  definido por

$$q(\alpha, \sigma) \doteq \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma^2 \geq \alpha; \\ 0, & \text{si } \sigma^2 < \alpha. \end{cases}$$

Es fácil verificar que  $q$  es un filtro de regularización. La condición (2) de la Definición 3.20 se satisface con  $c(\alpha) = 1/\sqrt{\alpha}$ . Observar que si se define  $g_\alpha(\sigma^2)$  como en (3.34) se obtiene (3.26) con  $\lambda = \sigma^2$ . Así, este filtro corresponde a la descomposición en valores singulares truncada, TSVD.

**Ejemplo 3.23.** La función  $q(\alpha, \sigma) \doteq \sigma^2/(\alpha + \sigma^2)$  es un filtro de regularización y la condición (2) de la Definición 3.20 se satisface con  $c(\alpha) = 1/(2\sqrt{\alpha})$ . Si definimos  $g_\alpha(\sigma^2)$  como en (3.34) en este caso se obtiene (3.28) con  $\lambda = \sigma^2$  y en consecuencia este filtro corresponde a la regularización de Tikhonov-Phillips.

Notar que los filtros dados en los ejemplos anteriores son continuos por tramos como función de  $\sigma$  en  $(0, \|K\|]$  para todo  $\alpha > 0$  y entonces, los métodos de filtro que definen son también métodos de regularización espectrales.

Recíprocamente, se puede probar fácilmente que si  $\{g_\alpha\}$  es un MRE para  $K^\dagger$ , entonces si  $q$  se define a partir de (3.34), se tiene que  $q$  es un filtro de regularización para  $K$  y por lo tanto,  $\{R_\alpha\}$  dado por (3.33) es un método de filtro.

Finalmente, es importante señalar que los métodos de filtro son casos particulares del método de la inversa aproximada introducido en la Sección 2.4. Más precisamente, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.24.** Sean  $K : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un operador lineal y compacto con sistema singular  $\{(\sigma_n; u_n, v_n)\}$  y  $\{R_\alpha\}$  un método de filtro. Entonces  $R_\alpha$  es una inversa aproximada con molificador

$$m_\gamma(s, \cdot) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} q(\alpha, \sigma) u_n(s) u_n(\cdot),$$

donde  $q$  es un filtro de regularización para  $K$ .

*Demostración.* Ver A. K. Louis ([39]), Teorema 2. ■